



АХМЕД ВЕЛИЕВ, КАРЛЕН ХУДАВЕРДИЕВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ
ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КОНЕЧНОЙ
И БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ
ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Министерство Образования Азербайджанской Республики
Университет «Одлар Юрду»
Бакинский Государственный Университет

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КОНЕЧНОЙ И БЕСКОНЕЧНОЙ
ОБЛАСТЯХ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО
ПОРЯДКА
(монография)**

*Печатается по решению Учёного
совета Университета «Одлар Юрду»
(протокол № 02, 02.02.2012 года)*

Баку, Типография АзТУ

2012

УДК 517.946

Главный редактор: чл.-корр. НАН Азербайджана, д.ф.-м.н.,
профессор **Б.А. ИСКЕНДЕРОВ**

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор **М.А. КУЛИЕВ**
д.ф.-м.н., профессор **Г.Ф. КУЛИЕВ**

Велиев А.А., Худавердиев К.И. Исследование одномерных обратных краевых задач в конечной и бесконечной областях для полулинейных гиперболических уравнений второго порядка. – Баку: Типогр. АзТУ, 2012, 143 с.

Многие важные прикладные проблемы приводят к так называемым обратным краевым задачам для дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных). В классических прямых задачах уравнение предполагается заданным и требуется определить решение этого уравнения, удовлетворяющее определённым дополнительным условиям (начальным и граничным), или какие-либо свойства решений. А под обратной задачей для дифференциальных уравнений понимается задача восстановления коэффициентов уравнения по некоторым характеристикам его решений. Такие задачи встречаются, например, при изучении процессов в среде, когда некоторые из физических характеристик неизвестны и при наличии дополнительных информации требуется определить эти неизвестные параметры.

Данная монография посвящена изучению вопросов существования и единственности классического решения некоторых одномерных обратных краевых задач в конечной и бесконечной областях для полулинейных гиперболических уравнений второго порядка.

Книга предназначена для математиков, механиков и физиков. В ней найдут много полезного для себя студенты старших курсов математических факультетов, а также аспиранты и научные сотрудники, занимающиеся изучением краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

© Велиев А.А., Худавердиев К.И., 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА I. Исследование классического решения одной нелинейной обратной одномерной краевой задачи для одного класса полулинейных гиперболических уравнений второго порядка	17
§1.1. Вспомогательные факты	18
§1.2. Существование классического решения в малом	23
§1.3. Единственность классического решения	35
§1.4. Существование классического решения в целом	38
ГЛАВА II. Классическая разрешимость в малом одной одномерной обратной краевой задачи на полуоси для одного класса полулинейных гиперболических уравнений второго порядка	51
ГЛАВА III. Исследование классического решения одной одномерной обратной краевой задачи на полуоси для полулинейных гиперболических уравнений второго порядка	71
§3.1. Разрешимость в малом классического решения задачи (3.1)-(3.4)	77



-1677-

§3.2. Единственность (в целом) классического решения задачи (3.1)-(3.4)	94
§3.3. Априорные оценки для классических решений задачи (3.1)-(3.4)	110
Литература	134

ВВЕДЕНИЕ

Многие важные прикладные проблемы приводят к так называемым обратным задачам для дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных). В классических прямых задачах уравнение предполагается заданным и требуется определить решение этого уравнения, удовлетворяющее определённым дополнительным условиям (начальным и граничным), или какие-либо свойства решений. А под обратной задачей для дифференциальных уравнений понимается задача восстановления коэффициентов уравнения по некоторым характеристикам его решений. Такие задачи встречаются, например, при изучении процессов в среде, когда некоторые из физических характеристик неизвестны и при наличии дополнительных информации требуется определить эти неизвестные параметры.

Настоящая книга посвящена исследованию вопросов существования и единственности классического решения одномерных обратных краевых задач в конечной и бесконечной областях для полулинейных гиперболических уравнений второго порядка. А именно, исследованы следующие три задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = a(t)b(x)u(t,x) + F(t,x,u(t,x),u_t(t,x), \\ u_x(t,x),a(t)) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \end{cases} \quad (0.1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (0.2)$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (0.3)$$

$$u_x(t,0) = g(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (0.4)$$

где $0 < T < +\infty$, $b(x)$, $F(t,x,u,v,w,a)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ - заданные функции, а $u(t,x)$ и $a(t)$ - искомые функции;

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = a(x)u_t(t,x) + F(t,x,u(t,x),u_t(t,x), \\ u_x(t,x)), \quad (0 \leq t \leq T, x \geq 0), \end{cases} \quad (0.5)$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad (x \geq 0), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (x \geq 0), \quad (0.6)$$

$$u_x(t,0) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (0.7)$$

$$u(t,0) = g(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (0.8)$$

где $0 < T < +\infty$, F , φ , ψ , f , g - заданные функции, а $u(t,x)$ и $a(x)$ - искомые функции;

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = a(t) \cdot u_t(t,x) + F(t,x,u(t,x),u_t(t,x), \\ u_x(t,x),a(t)) \quad (0 \leq t \leq T, x \geq 0), \end{cases} \quad (0.9)$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad (x \geq 0), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (x \geq 0), \quad (0.10)$$

$$u_x(t,0) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (0.11)$$

$$u(t,0) = g(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (0.12)$$

где $0 < T < +\infty$, F , φ , ψ , f , g - заданные функции, а $u(t,x)$ и $a(t)$ - искомые функции.

Как известно, исследованию прямых краевых задач (т.е. смешанных задач) для линейных и нелинейных гиперболических уравнений посвящено много работ, например, работы Л.Лихтенштейна, М.Р.Сиддиги, Ю.Шаудера, М.Кржижанского, С.Н.Бернштейна, З.И.Халилова, О.А.Ладыженской, В.А.Ильина, И.А.Шишмарёва, У.Барбути, Г.И.Чандирова, А.И.Гусейнова, К.И.Худавердиева, С.Мизохата, М.Ямагути, Ж.-Л.Лионса, В.А.Штраусса, В.Н.Гольдберга, Ю.И.Неймарка, Ю.Сазера, И.Курцвейля, В.А.Погореленко, П.Е.Соболевского, М.Валка, С.Я.Якубова, В.К.Калантарова, Я.Р.Бахшалиева и других. А теория обратных краевых задач является сравнительно молодой отраслью математики.

Теперь перечислим некоторые из тех работ, которые непосредственно связаны с темой данной книги.

В 1969 году в монографии [21] Лаврентьева М.М., Васильева В.Г. и Романова В.Г. исследован ряд постановок многомерных обратных краевых задач. Обратные краевые задачи, для которых в этой монографии доказаны теоремы единственности, являются линейными; решение этих задач сводится к решению линейных операторных уравнений первого рода. В этой монографии наряду с другими задачами, рассмотрен ряд постановок обратных краевых задач для телеграфного уравнения, уравнения теплопроводности и одного уравнения эллиптического типа; с помощью аппарата Фу-

рье-Лапласа установлены теоремы единственности решения соответствующих задач и получен алгоритм построения решения.

В 1969 году в работе [30] Романова В.Г. рассмотрен случай задачи (0.5)-(0.8), когда $\varphi = \psi = f \equiv 0$, $F(t, x, u, u_t, u_x) = h_1(a(x)) \cdot u + h_2(t, x)$, и при достаточно малых значениях T доказана теорема существования решения.

В 1970 году в книге [24] Латтеса Р. и Лионса Ж.-Л. рассмотрен важный класс обратных краевых задач для дифференциальных операторов, т.е. задачи, в которых неизвестными являются коэффициенты начальных, либо краевых условий.

В 1970 году в работе [16] Cannon J.R., Dunninger D.R. рассмотрена задача нахождения функций $u(t, x) \in C^2$ ($t > 0$, $0 < x < 1$) $\cap C(t \geq 0, 0 \leq x \leq 1)$ и $f(x) \in C(0 < x < 1)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(x) & (t > 0, 0 < x < 1), \\ u(t, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ u(t, 0) = \mu_1(t) \quad (t \geq 0), \quad u(t, 1) = \mu_2(t) \quad (t \geq 0), \\ u_x(t, 0) = \mu_3(t) \quad (t \geq 0), \end{cases}$$

где $\varphi(x), \psi(x), \mu_i(t)$ ($i = \overline{1,3}$) - заданные функции. С помощью метода линейного программирования построен алгоритм численного решения этой задачи. Кроме того, найден ряд формул для оценки погрешностей.

В 1971 году работа [4] Благовещенского А.С. была посвящена нахождению неизвестного коэффициента в задаче о колебаниях неоднородной струны. Эта задача ранее была решена М.Г.Крейном с помощью сведения её к одномерной стационарной задаче. А автор дал прямое элементарное решение её. Задача М.Г.Крейна решена в этой работе с помощью интегральных уравнений, аналогичных уравнению Вольтерра.

В 1971 году в работе [18] Кулиева М.А. рассмотрена задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x, u(t, x), a(t)) \quad (0 < t < T, 0 < x < 1), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \\ u(t, x_0) = a(t)h(t) + F(t) \quad (0 \leq t \leq T), \end{array} \right.$$

где $x_0 \in (0,1)$ - фиксированная точка; $0 < T < +\infty$; f, φ, ψ, h, F - заданные функции, а $u(t, x)$ и $a(t)$ - искомые функции. В работе найдены достаточные условия существования единст-

венного классического решения этой задачи, непрерывно зависящего (в определённом смысле) от φ , ψ и h .

В 1972 году в работе [9] Weston V.H. с помощью интегральных уравнений, являющихся обобщением метода решения обратных задач теории рассеяния на нестационарный случай, решается обратная задача определения коэффициентов $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ в уравнении

$$u_{xx} - u_{tt} + A(x)u_x + B(x)u_t + C(x)u = 0$$

по заданным значениям коэффициентов отражения и прохождения падающей волны $u'_+(x-t)$ и коэффициента ослабления $G(l)$, связанного с коэффициентом $B(x)$ соотношением

$$G(l)^{-1} = \exp \left(\int_0^l B(x) dx \right).$$

Предполагается, что $A(x)$, $B(x)$, их производные и функция $C(x)$ непрерывны на $[0, l]$ и равны нулю вне $[0, l]$ и $B(x) < 0$.

В 1973 году в работе [3] Бидайбекова Е.Ы. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = q(u(t, x)) + f(t, x) & (t \geq 0, -\infty < x < +\infty), \\ u(0, x) = 0 & (-\infty < x < +\infty), \quad u_t(0, x) = 0 & (-\infty < x < +\infty), \\ u(t, 0) = \varphi(t) & (t \geq 0). \end{cases}$$

Требуется найти аналитическую в окрестности точки $u = 0$ функцию $q(u)$. Получен алгоритм определения $q(u)$ в предположении, что $\varphi''(0) \neq 0$.

В 1973 году в работе [12] Елубаева С.В. рассмотрена одна обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка. Доказана теорема об однозначности восстановления двумерной искомой вектор-функции в шаре пространства Банаха C при задании определённых краевых условий на характеристиках этого уравнения.

В 1973 году в кандидатской диссертации [19] Кулиева М.А., наряду с другими задачами, рассмотрен частный случай задачи (0.1)-(0.4), когда $F(t, x, u, u_t, u_x, a) = f(t, x)$ и изучены вопросы существования (в малом), единственности и непрерывной зависимости (в определённом смысле) от данных $b(x)$, $g(t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(t, x)$ классического решения.

В 1974 году в работе [53] Яхно В.Г. ищется функция, входящая нелинейно в квазилинейное уравнение второго порядка гиперболического типа и зависящая только от одной из пространственных переменных; при этом задано решение смешанной задачи для рассматриваемого уравнения в одной из точек полупространства (как функция времени). Найдены достаточные условия существования и единственности решения изучаемой задачи.

В 1976 году в работе [10] Глушковой Е.С. исследована одна обратная краевая задача для квазилинейного уравнения гиперболического типа. Искомая функция зависит от трёх пространственных переменных и от решения этого уравнения. Выделен некоторый класс функций, в котором поставленная задача имеет единственное решение.

В 1976 году в работе [1] Аниконова Ю.Е. найдены достаточные условия единственности решения обратной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения с двумя пространственными переменными.

В работах [5-8] Велиева А.А. доказаны: теорема существования, теорема единственности и теорема существования и единственности классического решения задач (0.1)-(0.4) и (0.5)-(0.8).

В 1977 году в работе [11] Глушковой Е.С. изучена задача определения коэффициентов $a(u)$, $b(u)$ и $f(u)$, входящих в уравнение гиперболического типа

$$u_{xx} = a(u)u_{xy} + b(u)u_x + f(u).$$

При этом заданы значения решений трёх задач Коши для этого уравнения в фиксированной точке числовой прямой. Выделен некоторый класс вектор-функций (a, b, f) , в котором поставленная задача имеет единственное решение.

В 1978 году в работе [15] Кабанихина С.И. изучена задача определения пары $(u(t, x, y), p(x, y))$ функций $u(t, x, y)$ и $p(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} u_{\Delta}(t, x, y) = \Delta u(t, x, y) + p(x, y)u(t, x, y) \quad ((t, x, y) \in R_+ \times R^2), \\ u(0, x, y) = \varphi(x, y) \quad ((x, y) \in R^2), \quad u_t(0, x, y) = 0 \quad ((x, y) \in R^2), \\ u(t, 0, y) = g(t, y) \quad (t \in R_+, y \in R), \end{cases}$$

где Δ - лапласиан в R^2 , $R_+ = [0, +\infty)$, $R = (-\infty, +\infty)$. Эта задача классически некорректна, ибо нет непрерывной зависимости (u, p) от (φ, g) ; g не может быть задана произвольно. В работе найдены достаточные условия корректности по А.Н.Тихонову.

В 1978 году в работе [31] Романова В.Г. предложен новый метод исследования обратных задач для гиперболических уравнений, основанный на использовании энергетических неравенств. Он применяется к проблеме отыскания линейного дифференциального оператора второго порядка с коэффициентами, зависящими только от пространственных переменных.

В 1980 году в работе [54] Яхно В.Г. рассмотрена одномерная обратная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка. С физической точки зрения, эта задача требует определить скорость распространения возму-

щения в неоднородной изотропной среде по известному режиму колебаний одной из точек границы этой среды. Колебания созданы мгновенным источником, размещённым на участке границы. Описан и обоснован метод построения решения изучаемой задачи.

Наконец, в 2006 году в докторской диссертации [20] Кулиева М.А. изучены вопросы существования и единственности классического решения многомерных обратных краевых задач для линейных гиперболических, параболических, интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и систем параболических уравнений.

А теперь перейдём к краткому описанию содержания данной книги, которая состоит из введения и трёх глав.

Глава I, посвящённая исследованию задачи (0.1)-(0.4), состоит из четырёх параграфов.

В § 1.1 решение задачи (0.1)-(0.4) сводится к решению системы двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго рода типа Вольтерра и вводятся некоторые банаховы пространства.

В § 1.2 с помощью принципа сжатых отображений доказана теорема существования в малом классического решения задачи (0.1)-(0.4).

В § 1.3 с помощью специального подхода доказана теорема о единственности классического решения задачи (0.1)-(0.4).

В последнем § 1.4 главы I, пользуясь результатами §1.2, методом априорных оценок доказана теорема существования в целом классического решения задачи (0.1)-(0.4).

Глава II посвящена исследованию задачи (0.5)-(0.8). В этой главе с помощью принципа сжатых отображений доказана теорема существования в малом классического решения задачи (0.5)-(0.8).

Глава III, посвящённая исследованию задачи (0.9)-(0.12), состоит из трёх параграфов.

В § 3.1 с помощью принципа сжатых отображений доказаны две теоремы существования в малом классического решения задачи (0.9)-(0.12).

В § 3.2 с помощью специального подхода доказана теорема о единственности классического решения задачи (0.9)-(0.12).

В последнем § 3.3 главы III доказаны пять теорем об априорной ограниченности в различных метриках первой компоненты $u(t, x)$ классических решений $\{u(t, x), a(t)\}$ задачи (0.9)-(0.12); кроме того, доказаны две теоремы об априор-

ной ограниченности в $C[0, T]$ второй компоненты $a(t)$ классических решений $\{u(t, x), a(t)\}$ задачи (0.9)-(0.12).

Основные результаты данной книги опубликованы в работах [5-8] А.А.Велиева.

ГЛАВА I

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУ- ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Данная глава посвящена исследованию одной обратной краевой задачи для одного класса полулинейных гиперболических уравнений второго порядка с добавочным граничным условием, не нужным в случае, когда искомый коэффициент рассматриваемого уравнения известен. А именно, в данной главе исследована следующая задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = a(t)b(x)u(t, x) + F(t, x, u(t, x), \\ u_t(t, x), u_x(t, x), a(t)) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \end{cases} \quad (1.1)$$

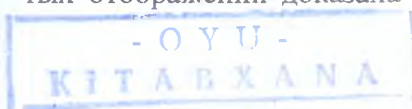
$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (1.2)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.3)$$

$$u_x(t, 0) = g(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.4)$$

где $0 < T < +\infty$, $b(x)$, $F(t, x, u, v, w, a)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ - заданные функции, а $u(t, x)$ и $a(t)$ - искомые функции.

В этой главе с помощью метода Фурье и принципа сжатых отображений доказана теорема существования в малом



(т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) классического решения задачи (1.1)-(1.4); с помощью специального подхода доказана теорема единственности в целом (т.е. для произвольно фиксированных конечных значений T) классического решения задачи (1.1)-(1.4), а с помощью уже доказанной теоремы существования в малом и метода априорных оценок доказана теорема существования в целом для классического решения задачи (1.1)-(1.4), причём под классическим решением задачи (1.1)-(1.4) понимаем следующее

Определение. Пару $\{u(t, x), a(t)\}$ функций $u(t, x)$ и $a(t)$ назовём классическим решением задачи (1.1)-(1.4), если:

- а) функция $u(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема в замкнутой области $G_T \equiv \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$;
- б) функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;
- в) функции $u(t, x)$ и $a(t)$ удовлетворяют всем условиям (1.1)-(1.4) в обычном смысле.

§1.1. Вспомогательные факты

Легко убедиться, что после применения формальной схемы метода Фурье нахождение первой компоненты $u(t, x)$ любого классического решения $\{u(t, x), a(t)\}$ задачи (1.1)-(1.4) сводится к решению следующего нелинейного интегродифференциального уравнения типа Вольтерра:

$$\begin{aligned}
u(t, x) = & \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot \cos k\pi t \cdot \sin k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k\pi} \cdot \sin k\pi t \cdot \sin k\pi x + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \{a(\tau)b(\xi)u(\tau, \xi) + F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_\tau(\tau, \xi), \\
& u_\xi(\tau, \xi), a(\tau))\} \cdot \sin k\pi(t - \tau) \cdot \sin k\pi\xi d\xi d\tau \cdot \sin k\pi x, \quad (1.5)
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_k \equiv 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin k\pi x dx, \quad \psi_k \equiv 2 \int_0^1 \psi(x) \sin k\pi x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Далее, пользуясь уравнением (1.5), из условия (1.4) для определения второй компоненты $a(t)$ любого классического решения $\{u(t, x), a(t)\}$ задачи (1.1)-(1.4) получаем следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
a(t) = & h(t) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^3 \cdot \varphi_k \cdot \cos k\pi t + \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 \cdot \psi_k \cdot \sin k\pi t + \right. \\
& + g''(t) - C_a(t) + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k\pi)^2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 [a(\tau)b(\xi)u(\tau, \xi) + \\
& + F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi), a(\tau))] \times \\
& \left. \times \sin k\pi(t - \tau) \cdot \sin k\pi\xi d\xi d\tau \right\}, \quad (1.6)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_o(t) &\equiv \frac{\partial}{\partial x} F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), a(t)) \Big|_{x=0} = \\
&= F_x(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) + F_u(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) \cdot g(t) + \\
&+ F_v(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) \cdot g'(t),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$h(t) \equiv \frac{1}{b(0) \cdot g(t)}, \tag{1.8}$$

причём F_u и F_v - обозначения соответствующих частных производных функции $F(t, x, u, v, w, a)$.

Теперь, с целью исследования задачи (1.1)-(1.4), введём следующие банаховы пространства:

1.1.1. Обозначим через B_T^i ($i = 0, 1, 2, \dots$) совокупность всех функций вида $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k \pi x$, рассматриваемых в области $\mathcal{D}_T$, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и

$$\|u\|_{B_T^i} \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^i \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_k(t)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

1.1.2. Обозначим через $B_T^{i,j-1}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) совокупность всех функций вида $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k \pi x$, рассматриваемых в области $\mathcal{D}_T$, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и

$$\|u\|_{B_T^{i,j-1}} \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^i \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_k(t)| \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{i-1} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_k(t)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

1.1.3. Обозначим через E_T топологическое произведение $B_T^{4,3} \times C[0, T]$ с нормой:

$$\|(u, a)\|_{E_T} = \|u(t, x)\|_{B_T^{4,3}} + \|a(t)\|_{C[0, T]}. \quad (1.9)$$

Очевидно [47], что все эти пространства B_T^l , B_T^{l-1} и E_T банаховы.

Как видно из определения классического решения $\{u(t, x), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.4), функцию $u(t, x)$ всегда можно представить в виде:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k \pi x.$$

Тогда уравнение (1.5) можно заменить следующей эквивалентной счётной системой (относительно компонент $u_k(t)$ функции $u(t, x)$):

$$\begin{aligned} u_k(t) = & \varphi_k \cdot \cos k \pi t + \frac{\psi_k}{k \pi} \cdot \sin k \pi t + \frac{2}{k \pi} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \left\{ a(\tau) b(\xi) u(\tau, \xi) + \right. \\ & + F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi), a(\tau)) \cdot \sin k \pi \xi \times \\ & \left. \times \sin k \pi (t - \tau) d\xi d\tau \right\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots; t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В дальнейшем для функций $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k \pi x$ и $a(t)$ будем пользоваться следующими (пока формальными, а потом обоснованными) обозначениями:

$$\|u\|_{H^1} \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(k' \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_k(\tau)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\forall t \in [0, T]), \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{l+1}} \equiv & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(k' \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_k(\tau)| \right)^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k'^{l+1} \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u'_k(\tau)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\forall t \in [0, T]), \quad (1.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u, a) \equiv & \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot \cos k\pi t \cdot \sin k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k\pi} \cdot \sin k\pi t \times \\ & \times \sin k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \cdot \int_0^t \int_0^1 \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \sin k\pi \xi \times \\ & \times \sin k\pi(t-\tau) d\xi d\tau \cdot \sin k\pi x, \quad (1.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(u, a) \equiv & h(t) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^3 \cdot \varphi_k \cdot \cos k\pi t + \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 \psi_k \cdot \sin k\pi t + \right. \\ & + g''(t) - C_a(t) + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k\pi)^2 \cdot \int_0^t \int_0^1 \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \sin k\pi \xi \times \\ & \left. \times \sin k\pi(t-\tau) d\xi d\tau \right\}, \quad (1.14) \end{aligned}$$

$$H(u, a) = (\mathcal{P}(u, a), Q(u, a)), \quad (1.15)$$

где функция $C_a(t)$ определена соотношением (1.7), т.е.

$$\begin{aligned} C_a(t) \equiv & F_x(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) + F_u(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) \cdot g(t) + \\ & + F_v(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) \cdot g'(t), \quad (1.16) \end{aligned}$$

функция $h(t)$ определена соотношением (1.8) и

$$\Phi_{y,x}(t,x) \equiv a(t)b(x)u(t,x) + F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),a(t)). \quad (1.17)$$

§1.2. Существование классического решения

в малом

В этом параграфе с помощью принципа сжатых отображений доказывается следующая теорема о существовании в малом классического решения задачи (1.1)-(1.4).

Теорема 1.1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $\varphi(x)$ три раза непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, $\varphi^{(4)}(x) \in L_2(0,1)$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$.
2. Функция $\psi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, $\psi'''(x) \in L_2(0,1)$ и $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$.
3. Функция $b(x)$ трижды непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, $b(0) \neq 0$ и $b'(0) = b'(1) = 0$.
4. Функция $g(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и для любого $t \in [0,T]$ $g(t) \neq 0$.
5. Функция $F(t,x,u,v,w,a)$ непрерывна по совокупности своих переменных в области $\mathcal{I}_T \times (-\infty, \infty)^4$ вместе с производными

$$\partial^s F(t,x,u,v,w,a) / \partial x^{\alpha_0} \partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial w^{\alpha_3} \quad (s = 1, 2, 3)$$

и для любых $t \in [0,T]$, $w, a \in (-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned}
F(t, 0, 0, 0, g(t), a) &= F(t, 1, 0, 0, w, a) = F_w(t, 0, 0, 0, g(t), a) = \\
&= F_w(t, 1, 0, 0, w, a) = \partial^2 F(t, 0, 0, 0, g(t), a) / \partial x^{\beta_0} \partial u^{\beta_1} \partial v^{\beta_2} = \\
&= \partial^2 F(t, 1, 0, 0, w, a) / \partial x^{\beta_0} \partial u^{\beta_1} \partial v^{\beta_2} \equiv 0.
\end{aligned} \quad (1.18)$$

6. При любом фиксированном r ($0 < r < +\infty$) для любых $t \in [0, T]$, $w \in [-g_0, g_0]$ и $a_1, a_2 \in [-r, r]$:

$$|F_x(t, 0, 0, 0, w, a_1) - F_x(t, 0, 0, 0, w, a_2)| \leq q_{0,r} \cdot |a_1 - a_2|, \quad (1.19)$$

$$|F_u(t, 0, 0, 0, w, a_1) - F_u(t, 0, 0, 0, w, a_2)| \leq q_{1,r} \cdot |a_1 - a_2|, \quad (1.20)$$

$$|F_v(t, 0, 0, 0, w, a_1) - F_v(t, 0, 0, 0, w, a_2)| \leq q_{2,r} \cdot |a_1 - a_2|, \quad (1.21)$$

причём

$$q_{0,r} + q_{1,r} \cdot g_0 + q_{2,r} \cdot g_1 \equiv \beta_r < 1, \quad (1.22)$$

где

$$g_0 \equiv \|g(t)\|_{C[0,T]}, \quad g_1 \equiv \|g'(t)\|_{C[0,T]}. \quad (1.23)$$

7. Для каждого r ($0 < r < +\infty$) в области $\mathcal{G}_T \times [-r, r]^4$:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^s F(t, x, u_1, v_1, w_1, a_1)}{\partial x^{\alpha_0} \partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial w^{\alpha_3}} - \frac{\partial^s F(t, x, u_2, v_2, w_2, a_2)}{\partial x^{\alpha_0} \partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial w^{\alpha_3}} \right| \leq \\
&\leq C_r(t, x) \cdot |a_1 - a_2| \quad (s = 1, 2),
\end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\left| \frac{\partial^3 F(t, x, u_1, v_1, w_1, a_1)}{\partial x^{\alpha_0} \partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial w^{\alpha_3}} - \frac{\partial^3 F(t, x, u_2, v_2, w_2, a_2)}{\partial x^{\alpha_0} \partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial w^{\alpha_3}} \right| \leq$$

$$\leq C_r(t, x) \cdot (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2| + |a_1 - a_2|), \quad (1.25)$$

где $C_r(t, x) \in L_2(\mathcal{Y}_T)$.

8. Для некоторого r_0 ($0 < r_0 < +\infty$):

$$C_0 + d_{r_0} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |h(t)| < r_0, \quad (1.26)$$

где

$$C_0 \equiv \left(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|h(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{6(1+\pi^2)}}{\pi^4} \right) + \|g''(t)\|_{C[0,T]} \cdot \|h(t)\|_{C[0,T]}, \quad (1.27)$$

$$d_{r_0} \equiv \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ -r_0 \leq a \leq r_0}} |F_x(t, 0, 0, 0, g(t), a) + F_u(t, 0, 0, 0, g(t), a) \cdot g(t) + \\ + F_v(t, 0, 0, 0, g(t), a) \cdot g'(t)|. \quad (1.28)$$

Тогда при достаточно малых значениях T задача (1.1)-(1.4) имеет классическое решение.

Доказательство. Пользуясь определением операторов $\mathcal{P}(u, a)$ и $\mathcal{Q}(u, a)$, соотношениями (1.18) и произведя интегрирование по частям по ξ три раза в правых частях (1.13) и (1.14), легко получить, что для любых $(u, a) \in E_T^*$:

$$\mathcal{P}(u, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot \cos k\pi t \cdot \sin k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k\pi} \cdot \sin k\pi t \times$$

^{*} Пространство E_T определено в § 1.1 с нормой (1.9).

$$\times \sin k\pi x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k\pi)^4} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi \times \\ \times \sin k\pi(t-\tau) d\xi d\tau \cdot \sin k\pi x, \quad (1.29)$$

$$Q(u, a) = h(t) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^3 \cdot \varphi_k \cdot \cos k\pi t + \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 \psi_k \cdot \sin k\pi t + \right. \\ \left. + g''(t) - C_a(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi \times \right. \\ \left. \times \sin k\pi(t-\tau) d\xi d\tau \right\}, \quad (1.30)$$

где функция $\Phi_{u,a}(t, x)$ определена соотношением (1.17).

Оператор $H(u, a)$, определённый соотношением (1.15), рассмотрим в шаре $\mathcal{H}_0 \left(\|(u, a)\|_{E_T} \leq r_0 \right)$ пространства E_T .

Для каждого $(u, a) \in \mathcal{H}_0$ обозначим:

$$\mathcal{P}(u, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \sin k\pi x,$$

где

$$\tilde{u}_k(t) = \varphi_k \cdot \cos k\pi t + \frac{\psi_k}{k\pi} \cdot \sin k\pi t - \frac{2}{(k\pi)^4} \times \\ \times \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi \cdot \sin k\pi(t-\tau) d\xi d\tau. \quad (1.31)$$

Из (1.30) и (1.31) легко получить, что для любых $(u, a) \in \mathcal{H}_0$, k ($k = 1, 2, 3, \dots$) и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{u}_k(t)| &\leq |\varphi_k| + \frac{|\psi_k|}{k\pi} + \frac{2}{(k\pi)^4} \cdot \left\{ \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right)^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left\{ \int_0^t \sin^2 k\pi(t-\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \leq |\varphi_k| + \frac{|\psi_k|}{k\pi} + \\
 &+ \frac{2\sqrt{T}}{(k\pi)^4} \cdot \left\{ \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right)^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
 (k^4 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}_k(t)|)^2 &\leq 3 \left\{ (k^4 \cdot \varphi_k)^2 + \frac{(k^3 \cdot \psi_k)^2}{\pi^2} + \frac{4T}{\pi^8} \times \right. \\
 &\times \left. \int_0^T \left(\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right)^2 d\tau \right\}, \\
 |\tilde{u}_k'(t)| &\leq k\pi \cdot |\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{2}{(k\pi)^3} \times \\
 &\times \left\{ \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right)^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left\{ \int_0^t \cos^2 k\pi(t-\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \leq k\pi \cdot |\varphi_k| + |\psi_k| +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\sqrt{T}}{(k\pi)^3} \cdot \left\{ \int_0^1 \int_0^{\partial^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,\alpha}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot \left\{ \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(k^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}'_k(t)|^2 \leq 3 \left\{ \pi^2 (k^4 \cdot \varphi_k)^2 + (k^3 \cdot \psi_k)^2 + \frac{4T}{\pi^6} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 \int_0^{\partial^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,\alpha}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot \left\{ \right.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^4 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}_k(t)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}'_k(t)|^2 \leq 3 \left\{ (1 + \pi^2) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k^4 \cdot \varphi_k)^2 + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi^2} + 1 \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k^3 \cdot \psi_k)^2 + \frac{4T}{\pi^8} (1 + \pi^2) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 \int_0^{\partial^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,\alpha}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot \left\{ \leq \right.$$

$$\leq \frac{6}{\pi^8} (1 + \pi^2) \cdot \|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{6}{\pi^8} (1 + \pi^2) \times$$

$$\times \|\psi^m(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{6}{\pi^8} (1 + \pi^2) \cdot T \times$$

$$\times \int_0^1 \left\{ \int_0^{\partial^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,\alpha}(\tau, \xi) \right\}^2 d\xi d\tau, \quad (1.32)$$

$$|Q(u, a)| \leq |h(t)| \cdot \left\{ \pi^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cdot |\varphi_k| + \pi^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot |\psi_k| + |g''(t)| + \right.$$

$$+ |F_x(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) + F_u(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) \cdot g(t) +$$

$$+ F_v(t, 0, 0, 0, g(t), a(t)) \cdot g'(t) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \times$$

$$\left[\int_0^1 \int_0^{\partial^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,\alpha}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right]^2 d\tau \cdot \left[\times \right.$$

$$\left. \times \left[\int_0^1 \sin^2 k\pi(t - \tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \right] \leq \max_{0 \leq t \leq T} |h(t)| \times$$

$$\times \left\{ \pi^3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k^4 \cdot \varphi_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \pi^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k^3 \cdot \psi_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0 \leq t \leq T} |g''(t)| + \right.$$

$$+ \max_{0 \leq t \leq T} |F_x(t, 0, 0, 0, g(t), a) + F_u(t, 0, 0, 0, g(t), a) \cdot g(t) +$$

$$+ F_v(t, 0, 0, 0, g(t), a) \cdot g'(t) + \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{T} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left. \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^{\partial^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,\alpha}(\tau, \xi) \cdot \cos k\pi \xi d\xi \right)^2 d\tau \right\} \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq T} |h(t)| \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|\psi^m(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \right.$$

$$+ \max_{0 \leq t \leq T} |g''(t)| + d_{r_0} + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{3}} \cdot \left[\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \right)^2 d\xi d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \Bigg\}, \quad (1.33)$$

Таким образом, из неравенств (1.32) и (1.33) следует, что $\forall (u, a) \in \mathcal{K}_0$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(u, a)\|_{B_T^{4,3}}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^4 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}_k(t)| \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}'_k(t)| \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{6}{\pi^8} \cdot (1 + \pi^2) \cdot \left\{ \left\| \varphi^{(4)}(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 + \left\| \psi'''(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + T \cdot \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \right)^2 d\xi d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \|Q(u, a)\|_{C[0,T]} = \max_{0 \leq t \leq T} |Q(u, a)| &\leq \|h(t)\|_{C[0,T]} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left\| \varphi^{(4)}(x) \right\|_{L_2(0,1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\| \psi'''(x) \right\|_{L_2(0,1)} \right) + \|g''(t)\|_{C[0,T]} + d_{r_0} + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{3}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Аналогично (1.34), для любых $(u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathcal{K}_0$ имеем:

$$\|\mathcal{P}(u_1, a_1) - \mathcal{P}(u_2, a_2)\|_{B_T^{4,3}}^2 \leq \frac{2}{\pi^8} (1 + \pi^2) \cdot T \times$$

$$\times \int_0^T \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_1, a_1}(\tau, \xi) - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_2, a_2}(\tau, \xi) \right\}^2 d\xi d\tau. \quad (1.36)$$

Далее, пользуясь неравенствами (1.19)-(1.21) и обозначениями (1.22), (1.23), аналогично (1.33) для любых (u_1, a_1) , $(u_2, a_2) \in \mathcal{H}_0$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} |Q(u_1, a_1) - Q(u_2, a_2)| &\leq |F_x(t, 0, 0, 0, g(t), a_1(t)) - F_x(t, 0, 0, 0, g(t), a_2(t))| + \\ &+ |F_u(t, 0, 0, 0, g(t), a_1(t)) - F_u(t, 0, 0, 0, g(t), a_2(t))| \cdot |g(t)| + \\ &+ |F_v(t, 0, 0, 0, g(t), a_1(t)) - F_v(t, 0, 0, 0, g(t), a_2(t))| \cdot |g'(t)| + \\ &+ \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{3}} \cdot |h(t)| \cdot \left(\int_0^T \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_1, a_1}(\tau, \xi) - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_2, a_2}(\tau, \xi) \right\} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq (q_{0, r_0} + q_{1, r_0} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |g(t)| + q_{2, r_0} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|) \cdot |a_1(t) - a_2(t)| + \\ &+ \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{3}} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |h(t)| \cdot \left(\int_0^T \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_1, a_1}(\tau, \xi) - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_2, a_2}(\tau, \xi) \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \beta_{r_0} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{3}} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |h(t)| \times \\ &\times \left(\int_0^T \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_1, a_1}(\tau, \xi) - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_2, a_2}(\tau, \xi) \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|Q(u_1, a_1) - Q(u_2, a_2)\|_{C[0, T]} &\leq \beta_{r_0} \cdot \|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0, T]} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{3}} \cdot \|h(t)\|_{C[0,T]} \cdot \left(\int_0^T \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_1, a_1}(\tau, \xi) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_2, a_2}(\tau, \xi) \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Таким образом, из неравенств (1.34)-(1.37), пользуясь обозначением (1.27), получаем, что для любых $(u, a), (u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned}
\|H(u, a)\|_{E_T} &= \|\mathcal{P}(u, a)\|_{B_T^{4,3}} + \|Q(u, a)\|_{C[0,T]} \leq \left(\frac{\sqrt{6(1+\pi^2)}}{\pi^4} + \right. \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|h(t)\|_{C[0,T]} \cdot \left(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + \\
&+ \|h(t)\|_{C[0,T]} \cdot (\|g''(t)\|_{C[0,T]} + d_{n_0}) + \left(\frac{\sqrt{6(1+\pi^2)}}{\pi^4} + \right. \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|h(t)\|_{C[0,T]} \cdot \left(\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= C_0 + \|h(t)\|_{C[0,T]} \cdot d_{n_0} + \left(\frac{\sqrt{6(1+\pi^2)}}{\pi^4} + \right. \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|h(t)\|_{C[0,T]} \cdot \sqrt{T} \cdot \left(\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u,a}(\tau, \xi) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|H(u_1, a_1) - H(u_2, a_2)\|_{E_T} = \|\mathcal{P}(u_1, a_1) - \mathcal{P}(u_2, a_2)\|_{B_T^{4,3}} + \\
& + \|Q(u_1, a_1) - Q(u_2, a_2)\|_{C[0,T]} \leq \beta_{r_0} \cdot \|a_1 - a_2\|_{C[0,T]} + \\
& + \left(\frac{\sqrt{2(1+\pi^2)}}{\pi^4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|h(t)\|_{C[0,T]} \right) \times \\
& \times \sqrt{T} \cdot \left(\int_0^T \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_1, a_1}(\tau, \xi) - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \Phi_{u_2, a_2}(\tau, \xi) \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.39)
\end{aligned}$$

Далее, из структуры пространства $B_T^{4,3}$ следует, что для любых $u(t, x), V(t, x) \in B_T^{4,3}$, $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^s u(t, x)}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right| & \leq \pi^\beta \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(4-s)}}} \cdot \|u\|_{B_T^{4,3}}, \\
(s = \overline{1, 3}; \alpha = 0, 1 \quad \beta = \overline{0, 3}), \quad (1.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^s u(t, x)}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^s V(t, x)}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right| & \leq \pi^\beta \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(4-s)}}} \cdot \|u - V\|_{B_T^{4,3}}, \\
(s = \overline{0, 3}; \alpha = 0, 1 \quad \beta = \overline{0, 3}), \quad (1.41)
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right)^2 dx \leq \frac{\pi^{2\beta}}{2} \cdot \|u\|_{B_T^{4,3}}^2 \quad (\alpha = 0, 1 \quad \beta = \overline{3, 4}), \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^4 V(t, x)}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right)^2 dx & \leq \frac{\pi^{2\beta}}{2} \cdot \|u - V\|_{B_T^{4,3}}^2 \\
(\alpha = 0, 1 \quad \beta = \overline{3, 4}). \quad (1.43)
\end{aligned}$$

Теперь, пользуясь оценками (1.40)-(1.43) и неравенствами (1.24), (1.25), из (1.38) и (1.39) получаем, что для любых $(u, a), (u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned} \|H(u, a)\|_{E_T} &\leq C_0 + \|h(t)\|_{C[0, T]} \cdot d_{r_0} + \sqrt{T} \cdot C_{r_0} = \\ &= \left(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|h(t)\|_{C[0, T]} + \frac{\sqrt{6(1+\pi^2)}}{\pi^4} \right) + \\ &+ \|g''(t)\|_{C[0, T]} \cdot \|h(t)\|_{C[0, T]} + \|h(t)\|_{C[0, T]} \cdot d_{r_0} + \sqrt{T} \cdot C_{r_0}, \quad (1.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|H(u_1, a_1) - H(u_2, a_2)\|_{E_T} &\leq (\beta_{r_0} + \sqrt{T} \cdot \mathcal{F}_{r_0}) \cdot (\|a_1 - a_2\|_{C[0, T]} + \\ &+ \|u_1 - u_2\|_{E_T}) = (\beta_{r_0} + \sqrt{T} \cdot \mathcal{F}_{r_0}) \cdot \|(u_1, a_1) - (u_2, a_2)\|_{E_T}, \quad (1.45) \end{aligned}$$

где $C_r > 0$ и $\mathcal{F}_{r_0} > 0$ - некоторые постоянные, зависящие лишь от r_0 .

Из неравенств (1.44) и (1.45), в силу соотношений (1.22) и (1.26), следует, что при достаточно малых значениях T оператор H является в шаре $\mathcal{H}_0$ сжатым. Следовательно, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в шаре $\mathcal{H}_0$ единственную неподвижную точку $\{u(t, x), a(t)\}$, которая легко проверить, что является классическим решением задачи (1.1)-(1.4). Теорема доказана.

Замечание 1.1. Отметим, что для выполнения условия 8 теоремы 1.1 (т.е. неравенства (1.26)) достаточно, чтобы для любых $t \in [0, T]$, $W \in [-g_0, g_0]$ и $a \in (-\infty, \infty)$ имело место:

$$|F_x(t, 0, 0, 0, w, a)| \leq C \cdot (1 + |a|^\varepsilon),$$

$$|F_u(t, 0, 0, 0, w, a)| \leq C \cdot (1 + |a|^\varepsilon),$$

$$|F_v(t, 0, 0, 0, w, a)| \leq C \cdot (1 + |a|^\varepsilon),$$

где $g_0 \equiv \|g(t)\|_{C[0, T]}$, $C > 0$ - постоянная и $0 < \varepsilon < 1$; на самом деле, в этом случае для достаточно больших значений r_0 неравенство (1.26) очевидным образом выполняется.

Замечание 1.2. Как видно из процесса доказательства теоремы 1.1, в условии 6 теоремы 1.1 произвольность числа r можно заменить более слабым требованием $r = r_0$, где r_0 - число, фигурирующее в условии 8 этой же теоремы.

§1.3. Единственность классического решения

В этом параграфе с помощью специального подхода доказывается следующая теорема о единственности классического решения задачи (1.1)-(1.4).

Теорема 1.2. Пусть

1. Выполнены условия 1-7 теоремы 1.1.
2. Для любых $a \in (-\infty, \infty)$:

$$F_x(0,0,0,0,g(0),a) + F_u(0,0,0,0,g(0),a) \cdot g(0) + \\ + F_v(0,0,0,0,g(0),a) \cdot g'(0) = 0. \quad (1.46)$$

Тогда задача (1.1)-(1.4) не может иметь в пространстве E_T более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $\{u(t,x), a(t)\}$ и $\{\tilde{u}(t,x), \tilde{a}(t)\}$ - два различных классических решения задачи (1.1)-(1.4), принадлежащие пространству E_T . Легко видеть, что каждая из пар $\{u(t,x), a(t)\}$ и $\{\tilde{u}(t,x), \tilde{a}(t)\}$ удовлетворяет системе (1.5), (1.6). Тогда из систем (1.5) и (1.6), учитывая соотношение (1.46), получаем, что:

$$u(0,x) = \tilde{u}(0,x) \quad \forall x \in [0,1], \quad a(0) = \tilde{a}(0).$$

Примем обозначения:

$$T_1 \equiv \max\{t \in [0,T] : u(\tau,x) = \tilde{u}(\tau,x) \quad \forall \tau \in [0,t], \forall x \in [0,1]\}, \quad (1.47)$$

$$T_2 \equiv \max\{t \in [0,T] : a(\tau) = \tilde{a}(\tau) \quad \forall \tau \in [0,t]\}, \quad (1.48)$$

$$T_0 \equiv \min\{T_1, T_2\}. \quad (1.49)$$

По предположению о различности классических решений $\{u(t,x), a(t)\}$ и $\{\tilde{u}(t,x), \tilde{a}(t)\}$ имеем:

$$0 \leq T_0 < T.$$

Пусть r^* некоторое такое число, что

$$\|(u(t,x), a(t))\|_{E_T} \leq r^*, \quad \|(\tilde{u}(t,x), \tilde{a}(t))\|_{E_T} \leq r^*.$$

Тогда, пользуясь тем, что

$$u(t, x) = \tilde{u}(t, x) \quad \forall t \in [0, T_0], \forall x \in [0, 1],$$

$$a(t) = \tilde{a}(t) \quad \forall t \in [0, T_0],$$

для любых ε ($0 < \varepsilon \leq T - T_0$), совершенно аналогично неравенству (1.45), имеем:

$$\begin{aligned} \|(u, a) - (\tilde{u}, \tilde{a})\|_{E_{T_0+\varepsilon}} &= \|H(u, a) - H(\tilde{u}, \tilde{a})\|_{E_{T_0+\varepsilon}} \leq \\ &\leq (\beta_{r^*} + \sqrt{T} \cdot \mathcal{G}_{r^*}) \cdot \|(u, a) - (\tilde{u}, \tilde{a})\|_{E_{T_0+\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

где число β_{r^*} определено соотношением (1.22) (для $r = r^*$), а $\mathcal{G}_{r^*}$ - некоторая постоянная, зависящая лишь от r^* .

Из (1.50) видно, что если число ε ($0 < \varepsilon_0 \leq T - T_0$) выбрать так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\beta_{r^*} + \sqrt{\varepsilon_0} \cdot \mathcal{G}_{r^*} < 1,$$

то получим:

$$\|(u, a) - (\tilde{u}, \tilde{a})\|_{E_{T_0+\varepsilon_0}} = 0.$$

Следовательно,

$$u(t, x) = \tilde{u}(t, x) \quad \forall t \in [0, T_0 + \varepsilon_0], \forall x \in [0, 1],$$

$$a(t) = \tilde{a}(t) \quad \forall t \in [0, T_0 + \varepsilon_0].$$

А это, в силу положительности числа ε_0 , противоречит обозначениям (1.47)-(1.49). Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из доказанных теорем 1.1 и 1.2 вытекает следующее

Следствие. Если выполнены все условия 1-8 теоремы 1.1 и условие 2 теоремы 1.2, то в пространстве E_T существует в малом единственное в целом классическое решение задачи (1.1)-(1.4).

§1.4. Существование классического решения в целом

В этом параграфе, пользуясь вышедоказанной локальной теоремой 1.1 и методом априорных оценок, доказывается следующая теорема существования в целом для классического решения задачи (1.1)-(1.4).

Теорема 1.3. Пусть

1. Выполнены условия 1-7 теоремы 1.1.
2. Для любых $t \in [0, T]$ и $a \in (-\infty, \infty)$

$$|F_x(t, 0, 0, 0, g(t), a) + F_u(t, 0, 0, 0, g(t), a) \cdot g(t) + \\ + F_v(t, 0, 0, 0, g(t), a) \cdot g'(t)| \leq C_1 \cdot (1 + |a|^{\delta_0}) + C_2 \cdot |a| \\ (0 < \delta_0 < 1), \quad (1.51)$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 \geq 0$ - некоторые постоянные, причём

$$\max_{0 \leq t \leq T} |h(t)| \cdot C_2 \equiv q_0 < 1, \quad (1.52)$$

а функция $h(t)$ определена соотношением (1.8).

3. Функция

$$\Phi(t, x, u, v, w, a) = a \cdot b(x) \cdot u + F(t, x, u, v, w, a)$$

такая, что $\forall R > 0$ в области $\Omega_R \equiv [0, T] \times [0, 1] \times [-R, R] \times \times (-\infty, \infty)^3$:

$$|\Phi_x(t, x, u, v, w, a)| \leq a_R(t, x) + b_R(t) \cdot (v^2 + w^2), \quad (1.53)$$

$$|\Phi_u(t, x, u, v, w, a)| \leq a_R(t, x) + b_R(t) \cdot (|v| + |w|), \quad (1.54)$$

$$|\Phi_v(t, x, u, v, w, a)| \leq c_R(t), \quad (1.55)$$

$$|\Phi_w(t, x, u, v, w, a)| \leq b_R(t), \quad (1.56)$$

где

$$a_R(t, x) \in L_2(\mathcal{H}_T), \quad b_R(t) \in L_2(0, T), \quad c_R(t) \in L(0, T).$$

$$4. \quad \Phi(t, x, u, u_t, u_x, a) = f(x, u) + h(t, x, u, u_t, u_x, a), \quad (1.57)$$

причём:

а) функция $f(x, u)$ непрерывна по совокупности своих переменных в области $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$ и в этой же области

$$\int_0^u f(x, \xi) d\xi \equiv g(x, u) \leq a_0(x) + C_0 \cdot u^2 - g_0(u), \quad (1.58)$$

где $0 \leq a_0(x) \in L(0, 1)$, $C_0 > 0$ - постоянная, а функция

$g(u) \geq 0$ непрерывна на действительной оси;

б) в области $[0, T] \times [0, 1] \times (-\infty, \infty)^4$:

$$h(t, x, u, v, w, a) \cdot V \leq a_0(t, x) + b_0(t) \cdot \{g_0(u) + u^2 + v^2 + w^2\}, \quad (1.59)$$

$$0 \leq a_0(t, x) \in L(\mathcal{G}_T), \quad 0 \leq b_0(t) \in L(0, T).$$

5. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, 1] \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)$:

$$|\Phi_v(t, x, u, v, w, a)| \leq a_R(t), \quad (1.60)$$

$$|\partial^2 \Phi(t, x, u, v, w, a) / \partial v^{\alpha} \partial w^{\beta}| \leq a_R(t), \quad (1.61)$$

$$|\partial^2 \Phi_w(t, x, u, v, w, a) / \partial x^{\alpha_0} \partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial w^{\alpha_3}| \leq b_R(t) \quad (0 \leq \alpha_2 + \alpha_3 \leq 1), \quad (1.62)$$

$$|\partial^3 \Phi_w(t, x, u, v, w, a) / \partial x^{\alpha_0} \partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial w^{\alpha_3}| \leq b_R(t) \cdot (1 + |a|), \quad (1.63)$$

где $a_R(t) \in L_2(0, T)$, $a_R(t, x) \in L(\mathcal{G}_T)$.

Тогда задача (1.1)-(1.4) имеет классическое решение.

Доказательство. Сначала отметим, что из условия 2 данной теоремы следует условие 8 теоремы 1.1, ибо, в силу (1.51) и (1.52), при достаточно больших значениях r_0 очевидным образом выполняется неравенство (1.26). Следовательно, условия 1 и 2 данной теоремы 1.3 содержат в себе все условия теоремы 1.1. Поэтому при условиях 1 и 2 теоремы 1.3 существует классическое решение задачи (1.1)-(1.4), по крайней мере, в малом. А как видно из схемы доказательства ло-

кальной (т.е. в малом) теоремы 1.1, для доказательства данной нелокальной (т.е. в целом) теоремы 1.3 достаточно установить априорную ограниченность в $E_T \equiv B_T^{4,3} \times C[0, T]$ всевозможных классических решений $\{u(t, x), a(t)\}$ задачи (1.1)-(1.4), принадлежащих пространству E_T .

Пусть $\{u(t, x), a(t)\}$ - любое классическое решение задачи (1.1)-(1.4), принадлежащее пространству E_T . Умножив обе части уравнения (1.1) на функцию $2u_t(t, x)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1, причём произведя интегрирование по частям один раз во втором слагаемом в левой части, затем интегрируя полученное равенство по t от 0 до t , пользуясь представлением (1.57), неравенствами (1.58), (1.59) и неравенствами

$$u^2(t, x) \leq 2 \left\{ \varphi^2(x) + T \cdot \int_0^t u_\tau^2(\tau, x) d\tau \right\} \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.64)$$

$$\int_0^1 u^2(t, x) dx \leq 2 \int_0^1 \varphi^2(x) dx + 2T \cdot \int_0^t \int_0^1 u_\tau^2(\tau, x) dx d\tau \quad \forall t \in [0, T],$$

получаем, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &= \int_0^1 u_t^2(t, x) dx + \int_0^1 u_x^2(t, x) dx + 2 \int_0^1 g_0(u(t, x)) dx \leq \\ &\leq C^* + \int_0^t C(\tau) \mathcal{A}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.65)$$

где

$$C^* \equiv \int_0^1 \psi^2(x) dx + \int_0^1 (\varphi'(x))^2 dx + 2 \int_0^1 a_0(x) dx - 2 \int_0^1 g(x, \varphi(x)) dx + \\ + \int_0^T \int_0^1 a_0(t, x) dx dt + 4C_0 \cdot \int_0^1 \varphi^2(x) dx + 4 \int_0^1 \varphi^2(x) dx \cdot \int_0^T b_0(t) dt, \\ C(t) \equiv 2b_0(t) + 4C_0 \cdot T + 4T \cdot \int_0^T b_0(\tau) d\tau.$$

Из (1.65), применив неравенство Р.Беллмана, получаем:

$$\int_0^1 u_t^2(t, x) dx + \int_0^1 u_x^2(t, x) dx + 2 \int_0^1 g'_0(u(t, x)) dx \leq C_1 \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.66)$$

где $C_1 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u , a и t .

Из неравенства (1.64), в силу априорной оценки (1.66), следует априорная оценка:

$$\max_{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1} |u(t, x)| \leq C_2. \quad (1.67)$$

Далее, дифференцируя уравнение (1.1) по x один раз, умножая обе части полученного равенства на функцию $2u_{xx}(t, x)$ и интегрируя результат по x от 0 до 1, причём произведя интегрирование по частям один раз во втором слагаемом в левой части, затем интегрируя полученное равенство по t от 0 до t , пользуясь неравенствами

$$\left(\max_{0 \leq x \leq 1} |u_{xx}(t, x)| \right)^2 \leq 2 \left\{ g^2(t) + \int_0^1 (u_{xx}(t, x))^2 dx \right\} \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\int_0^1 (u_x(t, x))^4 dx \leq 2 \left\{ g^2(t) + \int_0^1 (u_{xx}(t, x))^2 dx \right\} \times \\ \times \int_0^1 (u_x(t, x))^2 dx \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.68)$$

$$\left(\max_{0 \leq x \leq 1} |u_t(t, x)| \right)^2 \leq \int_0^1 (u_{tx}(t, x))^2 dx \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\int_0^1 (u_t(t, x))^4 dx \leq \int_0^1 (u_{tx}(t, x))^2 dx \cdot \int_0^1 (u_t(t, x))^2 dx \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.69)$$

априорной оценкой (1.67) и для $R = C_2$ неравенствами (1.53)-(1.56), легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$B(t) \equiv \int_0^1 u_{xx}^2(t, x) dx + \int_0^1 u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_3 + \int_0^t \mathcal{Q}(\tau) B(\tau) d\tau, \quad (1.70)$$

где $C_3 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u , a и t , $0 \leq \mathcal{Q}(t) \in L(0, T)$.

Из (1.70), применив неравенство Р.Беллмана, получаем априорную оценку:

$$\int_0^1 u_{xx}^2(t, x) dx + \int_0^1 u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_4 \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.71)$$

где $C_4 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u , a и t .

Из (1.71), в силу неравенств (1.68) и (1.69), следуют априорные оценки:

$$\max_{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1} |u_i(t, x)| \leq C_5, \quad \max_{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1} |u_{-i}(t, x)| \leq C_5. \quad (1.72)$$

где $C_5 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от i , a и t .

Далее отметим, что после применения*) схемы метода Фурье, легко получить, что функции $u(t, x)$ и $a(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.5) и (1.6). Теперь, интегрируя по частям один раз по ξ в последнем слагаемом в правой части равенства (1.5), пользуясь априорными оценками (1.67), (1.72), (1.71) и обозначением (1.12) (для $i = 2$), из (1.5) получаем, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{H^{2,1}}^2 \leq C_6 + C_7 \cdot \left\{ \int_0^t \int_0^1 u_{\tau\xi}^2(\tau, \xi) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_{\xi\xi}^2(\tau, \xi) d\xi d\tau \right\} \leq C_8^2,$$

где $C_6 > 0, C_7 > 0$ и $C_8 > 0$ - некоторые постоянные, не зависящие от i , a и t .

Следовательно:

$$\|u(t, x)\|_{H^{2,1}} \leq C_8. \quad (1.73)$$

Далее, интегрируя по частям два раза по ξ в последнем слагаемом в правой части равенства (1.5), пользуясь априорными оценками (1.67), (1.72), (1.71), (1.73) (при $i = 3$), обозначениями (1.11) и (1.12), неравенствами

*) В данном случае законного, а не только формального.

$$u_{\xi\xi}^2(\tau, \xi) \leq \pi^4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \|u\|_{B_t^3}^2 = \frac{\pi^6}{6} \cdot \|u\|_{B_t^3}^2 \leq \frac{\pi^6}{6} \cdot \|u\|_{B_t^{3,2}}^2$$

$$(\tau \in [0, T], \xi \in [0, 1]), \quad (1.74)$$

$$u_{\tau\xi}^2(\tau, \xi) \leq \pi^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \|u_t\|_{B_t^2}^2 = \frac{\pi^4}{6} \cdot \|u_t\|_{B_t^2}^2 \leq \frac{\pi^4}{6} \cdot \|u\|_{B_t^{2,2}}^2$$

$$(\tau \in [0, T], \xi \in [0, 1]), \quad (1.75)$$

$$\int_0^1 u_{\xi\xi\xi}^2(\tau, \xi) d\xi \leq \pi^6 \cdot \frac{1}{2} \|u\|_{B_t^3}^2 = \frac{\pi^6}{2} \cdot \|u\|_{B_t^{3,2}}^2 \quad (\tau \in [0, T]), \quad (1.76)$$

$$\int_0^1 u_{\tau\xi\xi}^2(\tau, \xi) d\xi \leq \pi^4 \cdot \frac{1}{2} \|u_t\|_{B_t^2}^2 = \frac{\pi^4}{2} \cdot \|u\|_{B_t^{2,2}}^2 \quad (\tau \in [0, T]), \quad (1.77)$$

неравенствами (1.54) и (1.56) для $R = C_2$ и неравенствами (1.60)-(1.62) для $R = \max\{C_2, C_3\}$, из (1.5) легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{B_t^{3,2}}^2 \leq C_9 + \int_0^t C_{10}(\tau) \cdot \|u\|_{B_t^{3,2}}^2 d\tau, \quad (1.78)$$

где $C_9 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u , a и t , $0 \leq C_{10}(t) \in L(0, T)$.

Из (1.78), применив неравенство Р.Беллмана, получаем априорную оценку:

$$\|u\|_{B_t^{3,2}}^2 \leq C_{11}. \quad (1.79)$$

Из неравенств (1.74)-(1.77), пользуясь априорной оценкой (1.79), получаем следующие априорные оценки:

$$\max_{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1} |u_{xx}(t, x)| \leq C_{12}, \quad \max_{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1} |u_{tx}(t, x)| \leq C_{12}. \quad (1.80)$$

$$\int_0^1 u_{xxx}^2(t, x) dx \leq C_{12}, \quad \int_0^1 u_{txx}^2(t, x) dx \leq C_{12} \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.81)$$

где $C_5 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u , a и t .

Наконец, интегрируя по частям три раза по ξ в последнем слагаемом в правых частях равенств (1.5) и (1.6), пользуясь априорными оценками (1.67), (1.72), (1.80), (1.81), для $i = 4$ обозначениями (1.11) и (1.12), неравенствами

$$u_{\xi\xi\xi}^2(\tau, \xi) \leq \pi^6 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \|u\|_{B_t^1}^2 = \frac{\pi^8}{6} \cdot \|u\|_{B_t^1}^2 \leq \frac{\pi^8}{6} \cdot \|u\|_{B_t^{1,1}}^2, \\ (\tau \in [0, T], \xi \in [0, 1]),$$

$$u_{t\xi\xi}^2(\tau, \xi) \leq \pi^4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \|u_t\|_{B_t^1}^2 = \frac{\pi^6}{6} \cdot \|u_t\|_{B_t^1}^2 \leq \frac{\pi^6}{6} \cdot \|u\|_{B_t^{1,3}}^2, \\ (\tau \in [0, T], \xi \in [0, 1]),$$

$$\int_0^1 u_{\xi\xi\xi\xi}^2(\tau, \xi) d\xi \leq \pi^8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|u\|_{B_t^1}^2 = \frac{\pi^8}{2} \cdot \|u\|_{B_t^1}^2, \quad (\tau \in [0, T]),$$

$$\int_0^1 u_{t\xi\xi\xi}^2(\tau, \xi) d\xi \leq \pi^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|u_t\|_{B_t^1}^2 \leq \frac{\pi^6}{2} \cdot \|u\|_{B_t^{1,3}}^2, \quad (\tau \in [0, T])$$

и для $R = \max\{C_2, C_3\}$ неравенствами (1.60)-(1.63), из (1.5) и (1.6) легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{B_t^{1,3}}^2 \leq C_{13} + \int_0^t C_{14}(\tau) \cdot \left\{ \|u\|_{B_t^{1,3}}^2 + a^2(\tau) \right\} d\tau, \quad (1.82)$$

$$|a(t)| \leq C_{13} + C_{16} \cdot \|a(t)\|_{C[0,T]}^{\varepsilon_0} + q_0 \cdot |a(t)| + \\ + \left\{ \int_0^t C_{17}(\tau) \cdot \left(\|u\|_{B_t^4}^2 + a^2(\tau) \right) d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.83)$$

где $C_{13} > 0, C_{15} > 0, C_{16} > 0$ - некоторые постоянные, не зависящие от u , a и t , $0 \leq C_{14}(t)$, $0 \leq C_{17}(t) \in L(0, T)$, а число $q_0 < 1$ определено соотношением (1.52).

Из (1.83), пользуясь элементарными соотношениями

$$\left(\sum_{i=1}^4 a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^4 a_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 a_i \cdot a_j, \quad 2a_i \cdot a_j \leq a_i^2 + a_j^2 \quad (i \neq 3, j \neq 3),$$

$$2a_3 \cdot a_j \leq \varepsilon_0 \cdot a_3^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot a_j^2 \quad \left(j = 1, 2, 4; \quad 0 < \varepsilon_0 < \frac{1 - q_0^2}{3} \right),$$

легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$a^2(t) \leq C_{18} + C_{19} \cdot \|a(t)\|_{C[0,T]}^{2\varepsilon_0} + (q_0^2 + 3\varepsilon_0) \cdot a^2(t) + \\ + \int_0^t C_{20}(\tau) \cdot \left\{ \left(\|u\|_{B_t^4}^2 + a^2(\tau) \right) \right\} d\tau, \quad (1.84)$$

где $C_{18} > 0, C_{19} > 0$ - некоторые постоянные, а $C_{20}(t) \in L(0, T)$.

Из (1.84), пользуясь тем, что $q_0^2 + 3\varepsilon_0 < 1$ и приняв обозначение

$\gamma_0 = \frac{1}{1 - (q_0^2 + 3\varepsilon_0)}$, получаем, что для любого $t \in [0, T]$:

$$a^2(t) \leq \gamma_0 \cdot C_{18} + \gamma_0 \cdot C_{19} \cdot \|a(t)\|_{C[0,T]}^{2\varepsilon_0} +$$

$$+ \gamma_0 \cdot \int_0^t C_{20}(\tau) \cdot \left\{ \left(\|u\|_{B_t^{4,3}}^2 + a^2(\tau) \right) \right\} d\tau. \quad (1.85)$$

Теперь, складывая неравенства (1.82) и (1.85) получаем, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_t^{4,3}}^2 + a^2(t) &\leq C_{13} + \gamma_0 \cdot C_{18} + \gamma_0 \cdot C_{19} \cdot \|a(t)\|_{C[0,T]}^{2\delta_0} + \\ &+ \int_0^t (C_{14}(\tau) + \gamma_0 \cdot C_{20}(\tau)) \cdot \left\{ \|u\|_{B_\tau^{4,3}}^2 + a^2(\tau) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Из (1.86), применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_t^{4,3}}^2 + a^2(t) &\leq \left\{ C_{13} + \gamma_0 \cdot C_{18} + \gamma_0 \cdot C_{19} \cdot \|a(t)\|_{C[0,T]}^{2\delta_0} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \int_0^t (C_{14}(\tau) + \gamma_0 \cdot C_{20}(\tau)) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Из (1.87), в частности следует, что:

$$\begin{aligned} \|a(t)\|_{C[0,T]}^2 &\leq (C_{13} + \gamma_0 \cdot C_{18}) \cdot \exp \left\{ \int_0^t C_{14}(\tau) d\tau + \gamma_0 \cdot \int_0^t C_{20}(\tau) d\tau \right\} + \\ &+ \gamma_0 \cdot C_{19} \cdot \exp \left\{ \int_0^t C_{14}(\tau) d\tau + \gamma_0 \cdot \int_0^t C_{20}(\tau) d\tau \right\} \cdot \|a(t)\|_{C[0,T]}^{2\delta_0}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу того, что $2\delta_0 < 2$ (см.(1.51)), следует следующая априорная оценка:

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} \leq C_{21}, \quad (1.88)$$

где $C_{21} > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u и a .

Из (1.87), учитывая справедливость априорной оценки (1.88), получаем и следующую априорную оценку:

$$\|u(t, x)\|_{B_T^{4,1}} \leq C_{22}, \quad (1.89)$$

где $C_{22} > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u и a .

Таким образом, из (1.89) и (1.88) следует, что всевозможные классические решения $\{u(t, x), a(t)\}$ задачи (1.1)-(1.4), принадлежащие пространству E_T , априори ограничены по метрике пространства E_T , т.е.:

$$\|\{u(t, x), a(t)\}\|_{E_T} = \|u(t, x)\|_{B_T^{4,1}} + \|a(t)\|_{C[0,T]} \leq C^*,$$

где $C^* > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u и a . А отсюда, как было отмечено в начале доказательства данной теоремы 1.3, следует справедливость данной нелокальной теоремы.

Замечание 1.3. Следует отметить, что в теоремах 1.1 и 1.3 найденное классическое решение $\{u(t, x), a(t)\}$ задачи (1.1)-(1.4) обладает следующим дополнительным (по сравнению с определением классического решения) свойством:

$$u \in C([0, T]; W_2^4(0, 1)) \cap C^1([0, T]; W_2^3(0, 1)) \cap C^2([0, T]; W_2^2(0, 1)).$$

Замечание 1.4. Отметим, что в кандидатской диссертации [19] М.А.Кулиева рассмотрен частный случай задачи

(1.1)-(1.4), когда $F(t, x, u, u_t, u_x, a) = f(t, x)$ и изучены вопросы существования (в малом), единственности и непрерывной зависимости (в определённом смысле) от данных $b(x), g(t), \varphi(x), \psi(x)$ и $f(t, x)$ классического решения.

ГЛАВА II

КЛАССИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В МАЛОМ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Данная глава посвящена исследованию следующей одной обратной краевой задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = a(x)u_t(t, x) + F(t, x, u(t, x), \\ \quad u_t(t, x), u_x(t, x)) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \geq 0), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \geq 0), \quad (2.2)$$

$$u_x(t, 0) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.3)$$

$$u(t, 0) = g(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.4)$$

где $0 < T < +\infty$, F, φ, ψ, g - заданные функции, а $u(t, x)$ и $a(x)$ - искомые функции.

В этой главе с помощью принципа сжатых отображений доказана теорема существования в малом (т.е. при достаточно малых значениях T) классического решения задачи (2.1)-(2.4, причём под классическим решением задачи (2.1)-(2.4) понимаем следующее

Определение. Классическим решением задачи (2.1)-(2.4) назовём пару $\{u(t, x), a(x)\}$ функций $u(t, x)$ и $a(x)$, обладающих свойствами:

а) функция $u(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема в замкнутой области

$$\Omega_T \equiv [0, T] \times [0, +\infty); \quad (2.5)$$

б) функция $a(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$;

в) все условия (2.1)-(2.4) удовлетворяются в обычном смысле.

С помощью метода продолжения (по переменной x) решение задачи (2.1)-(2.4) сведено к решению следующей системы двух нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi - \int_0^{t-x} f(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \{a(\xi) \cdot u_\tau(\tau, \xi) + F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), \\ & u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi))\} d\xi d\tau \quad (0 \leq t \leq T, \quad x \geq 0), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} a(t) = & \frac{1}{\psi(t)} \cdot g''(t) + \frac{1}{\psi(t)} \cdot (-\varphi''(t) - \psi'(t) + f'(t)) - \\ & - \frac{1}{\psi(t)} \cdot \{F(t, 0, u(t, 0), u_t(t, 0), f(t)) + F(t, 0, u(t, 0), u_t(t, 0), \\ & - f(t))\} - \frac{1}{\psi(t)} \cdot \int_0^t a(\xi) \cdot u_{tt}(t - \xi, \xi) d\xi - \frac{1}{2\psi(t)} \cdot \int_0^t \{F_x(\tau, t - \tau, \\ & u(\tau, t - \tau), u_\tau(\tau, t - \tau), u_\xi(\tau, t - \tau)) + F_u(\tau, t - \tau, u(\tau, t - \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_\tau(\tau, t-\tau), u_\xi(\tau, t-\tau)) \cdot u_\xi(\tau, t-\tau) + F_v(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\
& u_\tau(\tau, t-\tau), u_\xi(\tau, t-\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, t-\tau) + F_w(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\
& u_\tau(\tau, t-\tau), u_\xi(\tau, t-\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, t-\tau) + F_x(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\
& u_\tau(\tau, t-\tau), -u_\xi(\tau, t-\tau)) + F_u(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\
& u_\tau(\tau, t-\tau), -u_\xi(\tau, t-\tau)) \cdot u_\xi(\tau, t-\tau) + F_v(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\
& u_\tau(\tau, t-\tau), -u_\xi(\tau, t-\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, t-\tau) - F_w(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\
& u_\tau(\tau, t-\tau), -u_\xi(\tau, t-\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, t-\tau) \} d\xi \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.7)
\end{aligned}$$

причём везде в дальнейшем будем предполагать, что

$$\begin{aligned}
\varphi(-x) &= \varphi(x), \quad \psi(-x) = \psi(x), \\
a(-x) &= a(x), \quad u(t, -x) = u(t, x),
\end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
F(t, -x, u_1, u_2, u_3) &= F(t, x, u_1, u_2, u_3), \quad f(t) \equiv 0 \\
&\text{при } t < 0, \quad \psi(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T],
\end{aligned} \quad (2.9)$$

где $x \geq 0$, $0 \leq t \leq T$, $-\infty < u_1, u_2, u_3 < \infty$.

Доказана следующая

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$ вместе с производными $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$; $\varphi'(0) = 0$.
2. Функция $\psi(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$ вместе с производной $\psi'(x)$; для любого $t \in [0, T]$ $\psi(t) \neq 0$; $\psi'(0) = 0$.
3. Функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$;

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

4. Функция $g(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$;

$$g(0) = \varphi(0), \quad g'(0) = \psi(0).$$

5. Функция $F(t, x, u, v, w)$ непрерывна в области $\Omega_1 \times (-\infty, \infty)^3$ вместе с производными F_x, F_u, F_v и F_w .

6. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, \infty) \times [-R, R]^3$:

$$\left| \frac{\partial^s F(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial \xi_3^{\alpha_3} \partial \xi_4^{\alpha_4}} \right| \leq b_R \quad (s = 0, 1), \quad (2.10)$$

$$\left| \frac{\partial^s F(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial \xi_3^{\alpha_3} \partial \xi_4^{\alpha_4}} - \frac{\partial^s F(t, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial \xi_3^{\alpha_3} \partial \xi_4^{\alpha_4}} \right| \leq \tilde{b}_R \cdot \sum_{i=1}^4 |\xi_i - \tilde{\xi}_i| \quad (s = 0, 1), \quad (2.11)$$

где $b_R > 0$, $\tilde{b}_R > 0$ - постоянные.

7. Для любых $t \in [0, T]$ и $u, v \in (-\infty, \infty)$:

$$F(t, 0, u, v, f(t)) + F(t, 0, u, v, -f(t)) = C(t) \in C[0, T]. \quad (2.12)$$

Тогда при достаточно малых значениях T задача (2.1)-(2.4) имеет классическое решение.

Доказательство. Обозначим через E_T множество всех пар функций $(u(t, x), a(t))$, где функция $u(t, x)$ непрерывна и ограничена в области $[0, T] \times [0, \infty)$ вместе со всеми своими

производными до второго порядка включительно, а функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Норму в этом множестве определим так:

$$\begin{aligned} \|(u, a)\|_{E_T} = & \sup_{\Omega_T} |u(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| + \\ & + \frac{1}{r_0} \cdot \left\{ \sup_{\Omega_T} |u_{tt}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{xx}(t, x)| \right\} + \\ & + \max_{0 \leq t \leq T} |a(t)|, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где область Ω_T определена соотношением (2.5),

$$r_0 > R_0 + \max_{x \geq 0} \left\{ 3 \sup |\psi(x)|, 2\tilde{b}_{R_0} \right\} \equiv \sigma_0, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} R_0 > \gamma_0 \equiv \max \left\{ \sup_{x \geq 0} |\varphi(x)|, \sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \right. \\ \left. + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|, \delta^* \right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \delta^* = \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \left| \frac{1}{\psi(t)} \cdot \left(-\varphi''(t) - \psi'(t) + f'(t) + g''(t) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{2} \cdot C(t) \right) \right| \right\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$C(t)$ - функция, фигурирующая в условии (2.12), причём числа $R_0 > 0$ и $r_0 > 0$ считаются фиксированными. Очевидно, что E_T банахово пространство.

Теперь в пространстве E_T определим следующий оператор:

$$\mathcal{P}(u, a) = (\tilde{u}, \tilde{a}),$$

где функция $\tilde{a}(t)$ равна правой части (2.7), а функция $\tilde{u}(t, x)$ равна правой части (2.6), причём при подстановке функции $a(t)$ в правую часть (2.6) считаем, что функция $a(t) \in C[0, T]$ продолжена из $[0, T]$ на $[0, +\infty)$ по формуле $a(t) = a(T) \forall t > T$; кроме того, имеются в виду также оговорки (2.8), (2.9).

Пользуясь условиями 1-5 данной теоремы и неравенством (2.10), легко показать, что для любых $(u(t, x), a(t)) \in E_T$:

$$\mathcal{P}(u(t, x), a(t)) = (\tilde{u}(t, x), \tilde{a}(t)) \in E_T. \quad (2.17)$$

Оператор $\mathcal{P}$, определённый во всём пространстве E_T , рассмотрим только на множестве

$$\mathcal{M} \equiv \left\{ (u, a) \in E_T : \sup_{\Omega_T} |u(t, x)| \leq R_0, \sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| \leq R_0, \right. \\ \left. \sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| \leq R_0, \sup_{\Omega_T} |u_{tt}(t, x)| \leq R_1, \sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| \leq R_1, \right. \\ \left. \sup_{\Omega_T} |u_{xx}(t, x)| \leq R_1, \sup_{0 \leq t \leq T} |a(t)| \leq R_0 \right\}, \quad (2.18)$$

где число $R_0 > 0$ определено соотношением (2.15), а $R_1 > 0$ - фиксированное число, удовлетворяющее условию:

$$R_1 > \gamma_1 \equiv \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \\ + R_0 \cdot \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max \{b_{R_0}, R_0^2\}, \quad (2.19)$$

причём b_{R_0} - число, фигурирующее в условии (2.10). Очевидно, что $\mathcal{M}$ является ограниченным, замкнутым и выпуклым множеством банахова пространства E_T . Тогда, пользуясь соответствующими условиями данной теоремы и определением оператора $\mathcal{P}$, легко получить, что для любых $(u, a), (u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}(t, x)| &\leq \sup_{x \geq 0} |\varphi(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| \cdot T + T \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot R_0^2 \cdot T^2 + \frac{1}{2} \cdot b_{R_0} \cdot T^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_t(t, x)| &\leq \sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \\ &+ R_0^2 \cdot T + b_{R_0} \cdot T, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_x(t, x)| &\leq \sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \\ &+ R_0^2 \cdot T + b_{R_0} \cdot T, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{tt}(t, x)| &\leq \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \\ &+ T \cdot b_{R_0} \cdot (1 + R_0 + 2R_1) + R_0 \cdot \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \\ &+ R_0 \cdot R_1 \cdot T + b_{R_0}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{tx}(t, x)| &\leq \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \\ &+ T \cdot b_{R_0} \cdot (1 + R_0 + 2R_1) + R_0 \cdot \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \end{aligned}$$

$$+ R_0 \cdot R_1 \cdot T + b_{R_0}, \quad (2.24)$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_x(t, x)| \leq \sup_{x \leq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| +$$

$$+ T \cdot b_{R_0} \cdot (1 + R_0 + 2R_1) + R_0^2 +$$

$$+ R_0 \cdot \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + R_0 \cdot R_1 \cdot T, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{a}(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \frac{1}{|\psi(t)|} \cdot [-\varphi''(t) - \psi'(t) + f'(t)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\psi(t)} \cdot C(t) + \frac{1}{\psi(t)} \cdot g^*(t) \right\} + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \times \end{aligned}$$

$$\times [R_0 \cdot R_1 \cdot T + T \cdot b_{R_0} \cdot (1 + R_0 + 2R_1)], \quad (2.26)$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_t(t, x) - \tilde{u}_2(t, x)| \leq \frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot T^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot T^2 + \frac{1}{2} \cdot T^2 \cdot \tilde{b}_{R_0} \right) \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - u_{2,j}(t, x)| +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T^2 \cdot \left(\sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \right.$$

$$\left. + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| \right), \quad (2.27)$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{1,j}(t, x) - \tilde{u}_{2,j}(t, x)| \leq T \cdot R_0 \cdot \left(\max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| + \right.$$

$$\left. + \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - u_{2,j}(t, x)| \right) +$$

$$\begin{aligned} + T \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot \left(\sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - \right. \\ \left. - u_{2,j}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| \right), \quad (2.28) \end{aligned}$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{1,x}(t, x) - \tilde{u}_{2,x}(t, x)| \leq T \cdot R_0 \cdot \left(\max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| + \right.$$

$$\left. + \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - u_{2,j}(t, x)| \right) + T \cdot \tilde{b}_{R_0} \times$$

$$\begin{aligned} \times \left(\sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - \right. \\ \left. - u_{2,j}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| \right), \quad (2.29) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{1,\mu}(t, x) - \tilde{u}_{2,\mu}(t, x)| \leq \frac{1}{r_0} \cdot \left\{ \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - \right.$$

$$\left. - a_2(t) \right| + R_1 \cdot T \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| +$$

$$+ R_0 \cdot T \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,\mu}(t, x) - u_{2,\mu}(t, x)| +$$

$$+ \tilde{b}_{R_0} \cdot \left(\sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - \right.$$

$$\left. - u_{2,j}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| \right) + (1 + R_0 +$$

$$+ 2R_1) \cdot T \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot \left(\sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - \\
& - u_{2,x}(t, x)| \Big) + T \cdot b_{R_0} \cdot \left(\sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \right. \\
& \left. + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - \right. \\
& \left. - u_{2,x}(t, x)| \right) \Big\} = \left[\frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} + \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \right] \times \\
& \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \left[\frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} + \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \right] \times \\
& \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \left[\frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} + \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + \right. \\
& \left. + R_0 + 2R_1) + \frac{1}{r_0} \cdot b_{R_0} \cdot T \right] \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \\
& + R_0 \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + b_{R_0} \cdot T \times \\
& \times \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + b_{R_0} \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \times \\
& \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \left(\frac{1}{r_0} \cdot \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \right. \\
& \left. + \frac{1}{r_0} \cdot R_1 \cdot T \right) \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|, \tag{2.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{1,x}(t, x) - \tilde{u}_{2,x}(t, x)| \leq \left[\frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \right] \times \\
& \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \left[\frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + \right. \\
& \left. + R_0 + 2R_1) \right] \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \\
& + \left[\frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) + \frac{1}{r_0} \cdot b_{R_0} \cdot T \right] \times \\
& \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + R_0 \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \times \\
& \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + b_{R_0} \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \times \\
& \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + b_{R_0} \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \times \\
& \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \left(\frac{1}{r_0} \cdot \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \right. \\
& \left. + \frac{1}{r_0} \cdot R_1 \cdot T \right) \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|, \tag{2.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{1,x}(t, x) - \tilde{u}_{2,x}(t, x)| \leq \frac{1}{r_0} \cdot \left\{ R_0 \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \right. \\
& \left. + R_0 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + b_{R_0} \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| + \frac{1}{r_0} \times \\ & \times \left(R_0 + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + R_1 \cdot T \right) \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|, \quad (2.32) \\ & \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{a}_1(t) - \tilde{a}_2(t)| \leq \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(x)|} \cdot \left\{ R_1 \cdot T \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| + \right. \\ & \quad + R_0 \cdot T \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| \Bigg\} + \tilde{b}_{R_0} \cdot T \times \\ & \quad \times (1 + R_0 + 2R_1) \cdot \sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \\ & \quad + \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - u_{2,j}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - \\ & \quad - u_{2,x}(t, x)| \Bigg\} + \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot \left(\sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \right. \\ & \quad + \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,xxx}(t, x) - \\ & \quad - u_{2,xxx}(t, x)| \Bigg\} = \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(x)|} \cdot \left\{ \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \times \right. \\ & \quad \times \sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \times \\ & \quad \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - u_{2,j}(t, x)| + [\tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) + \\ & \quad + \tilde{b}_{R_0} \cdot T] \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + R_0 \cdot T \cdot r_0 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -a_2(t) + \left(R_0 \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + R_1 \times \right. \\ & \times \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| \Big) \cdot T + \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \times \\ & \times \left(\sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - u_{2,j}(t, x)| + \right. \\ & + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| \Big) + b_{R_0} \cdot T \cdot \left(\sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - \right. \\ & \left. - u_{2,x}(t, x)| \right) + \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - \\ & - u_{2,xx}(t, x)| \Big) \Big\} = \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \times \\ & \times \sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \left[\frac{R_0}{r_0} + \tilde{b}_{R_0} \cdot T \times \right. \\ & \times \frac{1}{r_0} \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \Big] \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,j}(t, x) - u_{2,j}(t, x)| + \\ & + \left[\frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) + \frac{1}{r_0} \cdot b_{R_0} \cdot T \right] \times \\ & \times \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + R_0 \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - \\ & - u_{2,xx}(t, x)| + b_{R_0} \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,tt}(t, x) - u_{2,tt}(t, x)| + R_0 \cdot T \cdot r_0 \times \\
& \times \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,tx}(t, x) - u_{2,tx}(t, x)| + \\
& + r_0 \cdot b_{R_0} \cdot T \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| + \\
& + R_1 \cdot T \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| \Big\}. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Пользуясь определением чисел R_0, R_1 (см. соотношения (2.15) и (2.19)), нормы (2.13) и оператора $\mathcal{P}$ (см. соотношение (2.17)), из неравенств (2.20)-(2.33) легко получить, что при достаточно малых значениях T для любых $(u, a), (u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathcal{M}$:

$$\left. \begin{aligned}
& \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}(t, x)| \leq R_0, \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_t(t, x)| \leq R_0, \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_x(t, x)| \leq R_0, \\
& \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{tt}(t, x)| \leq R_1, \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{tx}(t, x)| \leq R_1, \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{xx}(t, x)| \leq R_1, \\
& \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{a}(t)| \leq R_0,
\end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{P}(u_1, a_1) - \mathcal{P}(u_2, a_2)\|_{E_T} = \|(\tilde{u}_1, \tilde{a}_1) - (\tilde{u}_2, \tilde{a}_2)\|_{E_T} \leq \\
& \leq \sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| \cdot \left[\frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \cdot (1 + R_0 + 2R_1) \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T^2 + 2\tilde{b}_{R_0} \cdot T + \frac{2}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} + 3(1 + R_0 + 2R_1) \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \Big] + \\
& + \sup_{\Omega_T} |u_{1,t}(t, x) - u_{2,t}(t, x)| \cdot \left[(1 + R_0 + 2R_1) \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T^2 + 2R_0 \cdot T + 2\tilde{b}_{R_0} \cdot T + 2 \cdot \frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} + 3(1 + R_0 + 2R_1) \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T + \\
& + \frac{1}{2} R_0 \cdot T^2 + \frac{R_0}{r_0} \Big] + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| \cdot \left[\frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \cdot ((1 + R_0 + \right. \\
& + 2R_1) \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T + b_{R_0} \cdot T) + \frac{1}{2} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T^2 + 2\tilde{b}_{R_0} \cdot T + 2 \cdot \frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} + 3(1 + R_0 + \\
& + 2R_1) \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T + 3 \cdot \frac{1}{r_0} \cdot b_{R_0} \cdot T \Big] + \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,tt}(t, x) - u_{2,tt}(t, x)| \times \\
& \times \left[3R_0 \cdot T + R_0 \cdot T \cdot r_0 \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \right] + \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,tx}(t, x) - u_{2,tx}(t, x)| \times \\
& \times \left[3b_{R_0} \cdot T + b_{R_0} \cdot T \cdot r_0 \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \right] + \frac{1}{r_0} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| \times \\
& \times \left[3b_{R_0} \cdot T + b_{R_0} \cdot T \cdot r_0 \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \right] + \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \cdot R_1 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot T^2 + 2R_0 \cdot T + 2 \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| \cdot \frac{1}{r_0} + \right. \\
& \left. + 2 \cdot \frac{R_1}{r_0} \cdot T + \frac{R_1}{r_0} \cdot T + \frac{R_0}{r_0} + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| \cdot \frac{1}{r_0} \right] \leq \\
& \leq q_T \cdot \|(u_1, a_1) - (u_2, a_2)\|_{E_T}, \quad (2.35)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
q_T = \max & \left\{ \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) + \frac{1}{2} \tilde{b}_{R_0} \cdot T^2 + \right. \\
& + 2\tilde{b}_{R_0} \cdot T + \frac{2}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} + 3 \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1), \\
& \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T \cdot (1 + R_0 + 2R_1) + \frac{1}{2} \tilde{b}_{R_0} \cdot T^2 + 2R_0 \cdot T + 2\tilde{b}_{R_0} \cdot T + \\
& + \frac{2}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} + \frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot T^2 + 3(1 + R_0 + 2R_1) \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T + \frac{R_0}{r_0}, \\
& \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \cdot \left[(1 + R_0 + 2R_1) \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T + b_{R_0} \cdot T \right] + \frac{1}{2} \tilde{b}_{R_0} \cdot T^2 + \\
& + 2\tilde{b}_{R_0} \cdot T + 2 \cdot \frac{\tilde{b}_{R_0}}{r_0} + 3(1 + R_0 + 2R_1) \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \tilde{b}_{R_0} \cdot T + \frac{3}{r_0} \cdot b_{R_0} \cdot T, \\
& 3R_0 \cdot T + R_0 \cdot T \cdot r_0 \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|}, \quad 3R_0 \cdot T + b_{R_0} \cdot T \cdot r_0 \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|} \cdot R_1 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot T^2 + 2R_0 \cdot T + \frac{3}{r_0} \cdot \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \\
& + \frac{3}{r_0} \cdot R_1 \cdot T + \frac{R_0}{r_0} \Big\} \leq \frac{1}{r_0} \cdot \max \left\{ 2 \cdot \tilde{b}_{\mu_0} + R_0, 3 \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + R_0 \right\} + \\
& + \mathcal{A}(T) = \frac{\sigma_0}{r_0} + \mathcal{A}(T), \tag{2.36}
\end{aligned}$$

причём функция $\mathcal{A}(T) \geq 0$ непрерывна по T и $\mathcal{A}(T) = 0$, а σ_0 - число, определённое соотношением (2.14).

Из соотношений (2.34) видно, что при достаточно малых значениях T

$$\mathcal{P}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \tag{2.37}$$

т.е. оператор $\mathcal{P}$ преобразует множество $\mathcal{M}$ в себя. Далее, так

как $\frac{\sigma_0}{r_0} < 1$, то очевидно, что при достаточно малых значениях T

$$q_T \leq \frac{\sigma_0}{r_0} + \mathcal{A}(T) < 1. \tag{2.38}$$

Таким образом, из соотношений (2.37) и (2.38) следует, что оператор $\mathcal{P}$ является в множестве $\mathcal{M}$ сжатым.

Следовательно, в силу принципа сжатых отображений, при достаточно малых значениях T оператор $\mathcal{P}$ имеет в множестве $\mathcal{M}$ единственную неподвижную точку:

$$\mathcal{P}(u(t, x), a(t)) = (u(t, x), a(t)) \in \mathcal{M} \subset E_T, \tag{2.39}$$

причём по определению оператора $\mathcal{P}$ функции $u(t, x)$ и $a(t)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (2.6) и (2.7). По определению пространства E_T функция $u(t, x)$ непрерывна и ограничена в замкнутой области $[0, T] \times [0, \infty)$ вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно, а функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$, причём, как мы условились при определении оператора $\mathcal{P}$, функция $a(t)$ продолжена из $[0, T]$ на $[0, \infty)$ по формуле

$$a(t) = a(T) \quad \forall t > T.$$

Пользуясь тем, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (2.6), непосредственной проверкой легко показать, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет всем условиям (2.2) и (2.3) в обычном классическом смысле, а пара функций $(u(t, x), a(t))$ удовлетворяет в области $0 \leq t \leq T, x \geq 0$ уравнению (2.1) в обычном классическом смысле. Далее, если обе части уравнения (2.7) умножить на $\psi(t)$ и полученное равенство проинтегрировать два раза по t от 0 до t , причём пользоваться соотношениями $\varphi(0) = g(0), g'(0) - \varphi'(0) - \psi(0) + f(0) = 0, u_x(t, 0) = f(t)$, и в результате полученное последнее равенство разрешить относительно $g(t)$, то получим, что для $t \in [0, T]$:

$$g(t) = \varphi(t) + \int_0^t \psi(\xi) d\xi - \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{0-(t-\tau)}^{t-\tau} \{a(\xi) \cdot u_\tau(\tau, \xi) +$$

$$+ F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi))\} d\xi d\tau. \quad (2.40)$$

С другой стороны, из (2.6) видно, что $u(t, 0)$ равна правой части (2.40). Следовательно, $u(t, 0) = g(t)$, т.е. функция $u(t, x)$ удовлетворяет и граничному условию (2.4). Таким образом, найденная пара $(u(t, x), a(x))$ является классическим решением задачи (2.1)-(2.4). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Следует отметить, что для выполнения условия 7 вышедоказанной теоремы достаточно, чтобы удовлетворялось одно из следующих условий:

а) для любых $t \in [0, T]$, $u, v \in (-\infty, \infty)$ и $w \in [-f_0, f_0]$

$$F(t, 0, u, v, w) \equiv 0, \text{ где } f_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|;$$

б) функция $F(t, 0, u, v, w)$ не зависит от аргументов u и v .

Замечание 2.2. Отметим, что классическое решение $(u(t, x), a(x))$ задачи (2.1)-(2.4), установленное предыдущей теоремой, обладает теми дополнительными (по сравнению с определением классического решения) свойствами, что функции $u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tt}(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)$ и $a(x)$ ограничены в областях $[0, T] \times [0, \infty)$ и $[0, +\infty)$ соответственно.

Замечание 2.3. Следует отметить работы [45], [51], в которых рассмотрены различные частные случаи «прямых» задач (2.1), (2.2), (2.3) и (2.1), (2.2), (2.4). А именно, в работе [51] рассмотрен случай задачи (2.1), (2.2), (2.4), когда правая

часть уравнения (2.1) равна $h_1(u) + h_2(u) \frac{\partial u}{\partial t}$ и с помощью метода априорных оценок доказана теорема существования и единственности классического решения. В работе [45] рассмотрен случай задачи (2.1)-(2.3), когда правая часть уравнения (2.1) равна $F(t, x, u)$, а граничное условие (2.3) имеет вид $u_x(t, 0) = f(t, u(t, 0))$, и методом продолжения доказаны различные нелокальные теоремы существования и единственности классического решения; кроме того, показано, что классическое решение задачи может быть найдено методом последовательных приближений, причём последовательные приближения сходятся к точному (классическому) решению с факториальной скоростью равномерно в каждой конечной части области $t \geq 0, x \geq 0$, а при некоторых дополнительных условиях даже во всей бесконечной области $t \geq 0, x \geq 0$. А в работе [30] рассмотрен случай задачи (2.1)-(2.4), когда $\varphi = \psi = f \equiv 0$, $h(t, x, u, u_x) = g(a(x)) + h(t, x)$ и при достаточно малых значениях T доказана теорема существования решения.

ГЛАВА III

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Данная глава посвящена исследованию следующей одномерной обратной краевой задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = a(t)u_t(t, x) + F(t, x, u(t, x), \\ u_t(t, x), u_x(t, x), a(t)) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \end{cases} \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \geq 0), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \geq 0), \quad (3.2)$$

$$u_x(t, 0) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3.3)$$

$$u(t, 0) = g(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3.4)$$

где $0 < T < +\infty$, F, φ, ψ, f, g - заданные функции, а $u(t, x)$ и $a(t)$ - искомые функции.

В этой главе с помощью принципа сжатых отображений доказаны две теоремы существования в малом (т.е. при достаточно малых значениях T) классического решения задачи (3.1)-(3.4); с помощью специального подхода доказана теорема о единственности классического решения задачи (3.1)-(3.4); кроме того, для классических решений задачи (3.1)-(3.4) установлены различные априорные оценки, причём под

классическим решением задачи (3.1)-(3.4) понимаем следующее

Определение. Классическим решением задачи (3.1)-(3.4) назовём пару $\{u(t, x), a(t)\}$ функций $u(t, x)$ и $a(t)$, обладающих свойствами:

а) функция $u(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема в замкнутой области

$$\Omega_T \equiv [0, T] \times [0, \infty); \quad (3.5)$$

б) функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;

в) все условия (3.1)-(3.4) удовлетворяются в обычном классическом смысле.

С помощью метода продолжения (по переменной x) решение задачи (3.1)-(3.4) сведено к решению следующей системы двух нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi - \int_0^{t-x} f(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t-x+(t-\tau)} \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} a(\tau) u_\tau(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{t-x+(t-\tau)} \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), \\ & u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi), a(\tau)) d\xi d\tau \quad (0 \leq t \leq T, \quad x \geq 0), \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$a(t) = \frac{1}{g'(t)} \cdot (-\varphi''(t) - \psi'(t) + f'(t) + g''(t)) - \frac{1}{2g'(t)} \cdot \{F(t, 0,$$

$$u(t, 0), u_t(t, 0), f(t), a(t)) + F(t, 0, u(t, 0), u_t(t, 0), -f(t), a(t))\} -$$

$$-\frac{1}{g'(t)} \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot u_{xx}(\tau, t-\tau) d\tau - \frac{1}{2g'(t)} \cdot \int_0^t \{F_x(\tau, t-\tau,$$

$$\begin{aligned} & u(\tau, t-\tau), u_{\tau}(\tau, t-\tau), u_{\xi}(\tau, t-\tau), a(\tau)) + F_u(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\ & u_{\tau}(\tau, t-\tau), u_{\xi}(\tau, t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\xi}(\tau, t-\tau) + F_v(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\ & u_{\tau}(\tau, t-\tau), u_{\xi}(\tau, t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, t-\tau) + F_w(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\ & u_{\tau}(\tau, t-\tau), u_{\xi}(\tau, t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, t-\tau) + F_x(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\ & u_{\tau}(\tau, t-\tau), -u_{\xi}(\tau, t-\tau), a(\tau)) + F_u(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\ & u_{\tau}(\tau, t-\tau), -u_{\xi}(\tau, t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\xi}(\tau, t-\tau) + F_v(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\ & u_{\tau}(\tau, t-\tau), -u_{\xi}(\tau, t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, t-\tau) - F_w(\tau, t-\tau, u(\tau, t-\tau), \\ & u_{\tau}(\tau, t-\tau), -u_{\xi}(\tau, t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, t-\tau)\} d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3.7) \end{aligned}$$

причём везде в дальнейшем будем предполагать, что

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \psi(-x) = \psi(x), \quad u(t, -x) = u(t, x),$$

$$F(t, -x, u, v, w, a) = F(t, x, u, v, w, a), \quad (3.8)$$

$$f(t) \equiv 0 \quad \text{при } t < 0, \quad g'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.9)$$

где $x \geq 0$, $0 \leq t \leq T$, $-\infty < u, v, w, a < +\infty$. Следует отметить, что уравнение (3.7) получено следующим формальным путём: выражение (3.6) подставлено в условие (3.4), полученное равенство продифференцировано два раза по t ($t \in [0, T]$) и учтены продолжения (3.8) и условие (3.3).

Из (3.6) формальным дифференцированием легко получить, что

$$\begin{aligned}
 u_t(t, x) = & \frac{\varphi'(x+t) - \varphi'(x-t)}{2} + \frac{\psi(x+t) + \psi(x-t)}{2} - f(t-x) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) \{u_\tau(\tau, x+t-\tau) + u_\tau(\tau, x-(t-\tau))\} d\tau + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^t \{F(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\
 & u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) + F(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), \\
 & u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau))\} d\tau, \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_x(t, x) = & \frac{\varphi'(x+t) - \varphi'(x-t)}{2} + \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{2} + f(t-x) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) \{u_\tau(\tau, x+t-\tau) - u_\tau(\tau, x-t+\tau)\} d\tau + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^t \{F(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\
 & u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) - F(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), \\
 & u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau))\} d\tau, \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{tx}(t, x) = & \frac{\varphi''(x+t) - \varphi''(x-t)}{2} + \frac{\psi'(x+t) + \psi'(x-t)}{2} + f'(t-x) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) \{u_{\tau\xi}(\tau, x+(t-\tau)) + u_{\tau\xi}(\tau, x-(t-\tau))\} d\tau +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^t \{ F_x(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\
& u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) + F_u(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), \\
& u_\tau(\tau, x+t-\tau), u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) \cdot u_\xi(\tau, x+t-\tau) + \\
& + F_v(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), u_\xi(\tau, x+t-\tau), \\
& a(\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, x+t-\tau) + F_w(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\
& u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, x+t-\tau) + F_x(\tau, x-(t-\tau), \\
& u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) + \\
& + F_u(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), \\
& a(\tau)) \cdot u_\xi(\tau, x-(t-\tau)) + F_v(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, x-(t-\tau)) + \\
& + F_w(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, x-(t-\tau)) \} d\tau, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{xx}(t, x) &= \frac{\varphi''(x+t) + \varphi''(x-t)}{2} + \frac{\psi'(x+t) - \psi'(x-t)}{2} - f'(t-x) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) \{ u_{xx}(\tau, x+t-\tau) - u_{xx}(\tau, x-t+\tau) \} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \{ F_x(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\
& u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) + F_u(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_\tau(\tau, x+t-\tau), u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) \cdot u_\xi(\tau, x+t-\tau) + \\
& + F_v(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), u_\xi(\tau, x+t-\tau), \\
& a(\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, x+t-\tau) + F_w(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\
& u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, x+t-\tau) - F_x(\tau, x-(t-\tau), \\
& u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) - \\
& - F_u(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), \\
& a(\tau)) \cdot u_\xi(\tau, x-(t-\tau)) - F_v(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, x-(t-\tau)) - \\
& - F_w(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, x-(t-\tau)) \} d\tau, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$u_u(t, x) = \frac{\varphi''(x+t) + \varphi''(x-t)}{2} + \frac{\psi'(x+t) - \psi'(x-t)}{2} - f'(t-x) +$$

$$\begin{aligned}
& + a(t) \cdot u_t(t, x) + \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) \{ u_{\tau\xi}(\tau, x+(t-\tau)) - \\
& - u_{\tau\xi}(\tau, x-(t-\tau)) \} d\tau + F(t, x, u(t, x), u_\tau(t, x), u_\xi(t, x), a(t)) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \{ F_x(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\
& u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) + F_u(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), \\
& u_\tau(\tau, x+t-\tau), u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) \cdot u_\xi(\tau, x+t-\tau) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F_v(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), u_\xi(\tau, x+t-\tau), \\
& a(\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, x+t-\tau) + F_w(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\
& u_\xi(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, x+t-\tau) - F_x(\tau, x-(t-\tau), \\
& u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) - \\
& - F_u(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), \\
& a(\tau)) \cdot u_\xi(\tau, x-(t-\tau)) - F_v(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, x-(t-\tau)) - \\
& - F_w(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_\xi(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau)) \cdot u_{\xi\xi}(\tau, x-(t-\tau)) \} d\tau. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

§3.1. Разрешимость в малом классического решения задачи (3.1)-(3.4).

В этом параграфе с помощью принципа сжатых отображений доказаны следующие две теоремы существования в малом классического решения задачи (3.1)-(3.4).

Теорема 3.1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$ вместе с производными $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$; $\varphi'(0) = 0$.
2. Функция $\psi(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$ вместе с производными $\psi'(x)$; $\psi'(0) = 0$.
3. Функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$;

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

4. Функция $g(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, $g'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $g(0) = \varphi(0)$, $g'(0) = \psi(0)$.

5. Функция $F(t, x, u, v, w, a)$ непрерывна в области $\Omega_t \times (-\infty, \infty)^4$ по совокупности своих переменных вместе с производными F_x, F_u, F_v и F_w .

6. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, \infty) \times [-R, R]^4$:

$$|F(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)| \leq b_R(t), \quad |F_{\xi_i}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)| \leq b_R(t),$$

$$(i = \overline{1, 4}), \quad (3.15)$$

$$|F(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) - F(t, \xi_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4, \tilde{\xi}_5)| \leq$$

$$\leq \tilde{b}_R(t) \sum_{j=2}^5 |\xi_j - \tilde{\xi}_j|, \quad (3.16)$$

$$|F_{\xi_i}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) - F_{\xi_i}(t, \xi_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4, \tilde{\xi}_5)| \leq$$

$$\leq \tilde{b}_R(t) \sum_{j=2}^5 |\xi_j - \tilde{\xi}_j| \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (3.17)$$

где $b_R(t), \tilde{b}_R(t) \in L(0, T)$.

7. Для любых $t \in [0, T]$ и $u, v, a \in (-\infty, \infty)$

$$F(t, 0, u, v, f(t), a) + F(t, 0, u, v, -f(t), a) = C(t). \quad (3.18)$$

Тогда при достаточно малых значениях T задача (3.1)-(3.4) имеет классическое решение.

Доказательство. Обозначим через E_T множество всех пар функций $(u(t, x), a(t))$, где функция $u(t, x)$ непрерывна и ограничена в области Ω_T вместе с производными $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$ и $u_{xx}(t, x)$, а функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Норму в этом множестве определим так:

$$\begin{aligned} \|(u, a)\|_{E_T} = & \sup_{\Omega_T} |u(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| + \\ & + \sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{xx}(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |a(t)|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Очевидно, что E_T банахово пространство.

В пространстве E_T определим следующий оператор:

$$\mathcal{P}(u, a) = (\tilde{u}, \tilde{a}), \quad (3.20)$$

где функция $\tilde{a}(t)$ равна правой части (3.7), а функция $\tilde{u}(t, x)$ равна правой части (3.6), причём имеются в виду оговорки (3.8) и (3.9). Пользуясь условиями 1-5 данной теоремы и неравенством (3.15), легко доказать, что для любых $(u(t, x), a(t)) \in E_T$ $\mathcal{P}(u(t, x), a(t)) = (\tilde{u}(t, x), \tilde{a}(t)) \in E_T$. Оператор $\mathcal{P}$, определённый во всём пространстве E_T , рассмотрим только на множестве

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 \equiv \left\{ (u, a) \in E_T : \sup_{\Omega_T} |u(t, x)| \leq R_0, \sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| \leq R_0, \right. \\ \left. \sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| \leq R_0, \sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| \leq R_0, \right\} \end{aligned}$$

$$\sup_{\Omega_T} |u_{xx}(t, x)| \leq R_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T} |a(t)| \leq R_0 \Big\}, \quad (3.21)$$

где

$$R_0 > \gamma_0 \equiv \max \left\{ \sup_{x \geq 0} |\varphi(x)|, \sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|, \right. \\ \left. \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)|, \right. \\ \left. \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{g'(t)} \cdot \left(-\varphi''(t) - \psi'(t) + f'(t) + g''(t) - \frac{1}{2} C(t) \right) \right| \right\}, \quad (3.22)$$

причём $C(t)$ - функция, фигурирующая в соотношении (3.18). Очевидно, что $\mathcal{M}_0$ является ограниченным, замкнутым и выпуклым множеством банахова пространства E_T . Тогда, пользуясь соответствующими условиями данной теоремы и определением оператора $\mathcal{P}$, легко получить, что для любых $(u, a), (u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathcal{M}_0$:

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}(t, x)| \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi(x)| + T \cdot \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + T \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \\ + \frac{1}{2} R_0^2 \cdot T^2 + T \cdot \|b_{R_0}(t)\|_{L(0, T)}, \quad (3.23)$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_t(t, x)| \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \\ + T \cdot R_0^2 + \|b_{R_0}(t)\|_{L(0, T)}, \quad (3.24)$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_x(t, x)| \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| +$$

$$+ T \cdot R_0^2 + \|b_{R_0}(t)\|_{L(0,T)}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{tx}(t, x)| &\leq \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \\ &+ T \cdot R_0^2 + (1 + 3R_0^2) \cdot \|b_{R_0}(t)\|_{L(0,T)}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{xx}(t, x)| &\leq \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \\ &+ T \cdot R_0^2 + (1 + 3R_0^2) \cdot \|b_{R_0}(t)\|_{L(0,T)}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |a(t)| &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{g'(t)} \cdot (-\varphi''(t) - \psi'(t) + f'(t) + g''(t)) - \frac{1}{2g'(t)} \cdot C(t) \right| + \\ &+ \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot R_0^2 \cdot T + \frac{1}{2 \min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \times \\ &\times (1 + 3R_0^2) \cdot \|b_{R_0}(t)\|_{L(0,T)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_1(t, x) - \tilde{u}_2(t, x)| &\leq T \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \\ &+ T \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot T + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,t}(t, x) - u_{2,t}(t, x)| + \\ &+ T \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + T \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot T + \right. \\ &\left. + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{1,t}(t, x) - \tilde{u}_{2,t}(t, x)| \leq \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(T \cdot R_0 + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,j}(t,x) - u_{2,j}(t,x)| + \\
& + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,x}(t,x) - u_{2,x}(t,x)| + \left(T \cdot R_0 + \right. \\
& \left. + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|, \quad (3.30) \\
& \sup_{\Omega_r} |\tilde{u}_{1,x}(t,x) - \tilde{u}_{2,x}(t,x)| \leq \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| + \\
& + \left(T \cdot R_0 + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,j}(t,x) - u_{2,j}(t,x)| + \\
& + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,x}(t,x) - u_{2,x}(t,x)| + \left(T \cdot R_0 + \right. \\
& \left. + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|, \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\Omega_r} |\tilde{u}_{1,x}(t,x) - \tilde{u}_{2,x}(t,x)| \leq (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| + \\
& + (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,j}(t,x) - u_{2,j}(t,x)| + \\
& + \left((1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,x}(t,x) - \\
& - u_{2,x}(t,x)| + \left(T \cdot R_0 + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,x}(t,x) - \\
& - u_{2,x}(t,x)| + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,x}(t,x) - u_{2,x}(t,x)| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(T \cdot R_0 + (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \times \\
& \times \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|, \quad (3.32) \\
& \sup_{\Omega_r} |\tilde{u}_{1,x}(t,x) - \tilde{u}_{2,x}(t,x)| \leq (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| + \\
& + (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,j}(t,x) - u_{2,j}(t,x)| + \\
& + \left((1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,x}(t,x) - \\
& - u_{2,x}(t,x)| + \left(T \cdot R_0 + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,x}(t,x) - \\
& - u_{2,x}(t,x)| + \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,x}(t,x) - u_{2,x}(t,x)| + \\
& + \left(T \cdot R_0 + (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \times \\
& \times \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|, \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{a}_1(t) - \tilde{a}_2(t)| \leq \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot \left\{ (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_1(t,x) - \right. \\
& \left. - u_2(t,x)| + (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_r} |u_{1,j}(t,x) - \tilde{u}_{2,j}(t,x)| + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} + \|b_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - \\
& - u_{2,x}(t, x)| + \left(R_0 \cdot T + \|b_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,tx}(t, x) - \\
& - u_{2,tx}(t, x)| + \|b_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \cdot \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| + \\
& + \left(T \cdot R_0 + (1 + 3R_0) \cdot \|\tilde{b}_{R_0}(t)\|_{L(0,T)} \right) \times \\
& \times \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)|. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Из неравенств (3.23)-(3.28), в силу определения числа R_0 (см.(3.22)) видно, что при достаточно малых значениях T для любых $(u, a) \in \mathcal{M}_0$:

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}(t, x)| \leq R_0, \quad \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_t(t, x)| \leq R_0, \quad \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_x(t, x)| \leq R_0, \tag{3.35}$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{tx}(t, x)| \leq R_0, \quad \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{xx}(t, x)| \leq R_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{a}(t)| \leq R_0, \tag{3.36}$$

т.е. $\mathcal{P}\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$. С другой стороны, пользуясь определением нормы (3.19), из неравенств (3.29)-(3.34) легко получить, что для любых $(u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathcal{M}_0$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}(u_1, a_1) - \mathcal{P}(u_2, a_2)\|_{E_T} &= \|(\tilde{u}_1, \tilde{a}_1) - (\tilde{u}_2, \tilde{a}_2)\|_{E_T} \leq \\
&\leq q_T \cdot \|(u_1, a_1) - (u_2, a_2)\|_{E_T}, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
q_T \equiv & \max \left\{ \left\| \tilde{b}_{R_0}(t) \right\|_{L(0,T)} \cdot \left(T + 2 + 2(1 + 3R_0) + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot (1 + 3R_0) \right), \frac{1}{2} R_0 \times \right. \\
& \times T^2 + 2TR_0 + \left\| \tilde{b}_{R_0}(t) \right\|_{L(0,T)} \cdot \left(T + 2 + 2(1 + 3R_0) + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot (1 + 3R_0) \right), \\
& \left\| \tilde{b}_{R_0}(t) \right\|_{L(0,T)} \cdot \left(T + 2 + 2(1 + 3R_0) + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot (1 + 3R_0) \right) + \left\| b_{R_0}(t) \right\|_{L(0,T)} \times \\
& \times \left(2 + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \right), 2TR_0 + 2 \left\| b_{R_0}(t) \right\|_{L(0,T)} + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot \left(R_0 \cdot T + \right. \\
& \left. + \left\| b_{R_0}(t) \right\|_{L(0,T)} \right), \left\| b_{R_0}(t) \right\|_{L(0,T)} \cdot \left(2 + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \right), \frac{1}{2} R_0 \cdot T^2 + 2T \cdot R_0 + \\
& + \left\| \tilde{b}_{R_0}(t) \right\|_{L(0,T)} \cdot \left(T + 2 + 2(1 + 3R_0) + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot (1 + 3R_0) \right) + \\
& \left. + 2T \cdot R_0 + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot R_0 \cdot T \right\}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Из соотношения (3.38) видно, что выражение q_T непрерывно зависит от T ($T \geq 0$), причём $q_0 = 0$.

Таким образом, при достаточно малых значениях T $\mathcal{PM}_0 \subset \mathcal{M}_0$ и $\forall (u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathcal{M}_0$:

$$\left\| \mathcal{P}(u_1, a_1) - \mathcal{P}(u_2, a_2) \right\|_{E_T} \leq q_T \cdot \left\| (u_1, a_1) - (u_2, a_2) \right\|_{E_T},$$

где $q_T < 1$, т.е. оператор $\mathcal{P}$ является в $\mathcal{M}_0$ оператором сжатия. Следовательно, при достаточно малых значениях T оператор $\mathcal{P}$ имеет в $\mathcal{M}_0$ единственную неподвижную точку $(u, a) : \mathcal{P}(u, a) = (u, a) \in \mathcal{M}_0 \subset E_T$. По определению оператора $\mathcal{P}$ найденные функции $u(t, x)$ и $a(t)$ удовлетворяют системе (3.6), (3.7). Кроме того, легко убедиться, что функции $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$ и $u_{xx}(t, x)$ удовлетворяют в Ω_T соответственно равенствам (3.10)-(3.13).

По определению пространства E_T функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$, а функции $u(t, x)$, $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$ и $u_{xx}(t, x)$ непрерывны и ограничены в $\Omega_T = [0, T] \times [0, \infty)$. Далее, пользуясь тем, что функция $u(t, x)$ является решением уравнения (3.6), легко проверить, что она удовлетворяет всем условиям (3.2) и (3.3) в обычном классическом смысле. Из (3.6) непосредственным законным дифференцированием легко получить справедливость равенства (3.14). Из (3.14) видно, что функция $u_{tt}(t, x)$ также непрерывна в Ω_T . Пользуясь соотношением (3.6), непосредственной подстановкой легко проверить, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет в Ω_T уравнению (3.1). Далее, если обе части уравнения (3.7) умножить на

$g'(t)$ и полученное равенство проинтегрировать два раза по t от 0 до t ($t \in [0, T]$), причём пользоваться соотношениями

$$f(t) = u_x(t, 0), g'(0) - \varphi'(0) - \psi(0) + f(0) = 0, g(0) - \varphi(0) = 0, \quad (3.39)$$

и в результате полученное последнее равенство разрешить относительно $g(t)$, то легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$g(t) = \varphi(t) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{0-(t-\tau)}^{t-\tau} \{a(\xi) \cdot u_\tau(\tau, \xi) + F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi), a(\tau))\} d\xi d\tau. \quad (3.40)$$

С другой стороны, из (3.6) видно, что $u(t, 0)$ равна правой части (3.40). Следовательно, $u(t, 0) = g(t)$, т.е. функция $u(t, x)$ удовлетворяет и граничному условию (3.4). Таким образом, найденная пара $(u(t, x), a(t)) \in E_T$ является классическим решением задачи (3.1)-(3.4). Теорема доказана.

Замечание 3.1. Следует отметить, что для выполнения условия 7 вышедшей теоремы достаточно, чтобы для любых $t \in [0, T]$, $u, v, a \in (-\infty, \infty)$ и $w \in [-f_0, f_0]$, где $f_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$, функция $F(t, 0, u, v, w, a)$ не зависела от аргументов u, v и a , например, $F(t, 0, u, v, w, a) \equiv 0$.

Замечание 3.2. Отметим, что классическое решение $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.1)-(3.4), найденное предыдущей теоремой, обладает теми дополнительными (по сравнению с оп-

ределением классического решения) свойствами, что функции $u(t, x)$, $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$ и $u_{xx}(t, x)$ ограничены в неограниченной области $\Omega_T = [0, T] \times [0, \infty)$; кроме того, как видно из (3.14), ограничена в Ω_T также производная $u_{tt}(t, x)$ если, например, в неравенстве (3.15), фигурирующем в условии 6 теоремы 3.1, $b_R(t) \equiv b_R$, где $b_R \geq 0$ - постоянное.

Теорема 3.2. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$ вместе с производными $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ и $\varphi'''(x)$; $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$.
2. Функция $\psi(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$ вместе с производными $\psi'(x)$ и $\psi''(x)$; $\psi'(0) = 0$.
3. Функция $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0.$$

4. Функция $g(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, $g'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $g(0) = \varphi(0)$, $g'(0) = \psi(0)$.
5. Функция $F(t, x, u, v, w, a)$ непрерывна в области $\Omega_T \times (-\infty, \infty)^4$ по совокупности своих переменных вместе со всеми своими производными по переменным x, u, v и w до второго порядка включительно.
6. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, \infty) \times [-R, R]^4$:

$$\left| \frac{\partial^s F(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial \xi_3^{\alpha_3} \partial \xi_4^{\alpha_4}} \right| \leq b_R(t) \quad (s = 0, 1, 2), \quad (3.41)$$

$$\left| \frac{\partial^s F(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial \xi_3^{\alpha_3} \partial \xi_4^{\alpha_4}} - \frac{\partial^s F(t, \xi_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4, \tilde{\xi}_5)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial \xi_3^{\alpha_3} \partial \xi_4^{\alpha_4}} \right| \leq \\ \leq \tilde{b}_R(t) \cdot \sum_{i=2}^5 |\xi_i - \tilde{\xi}_i| \quad (s = 0, 1, 2), \quad (3.42)$$

где $b_R(t), \tilde{b}_R(t) \in L(0, T)$.

7. Для любых $t \in [0, T]$ и $u, v, a \in (-\infty, \infty)$

$$F(t, 0, u, v, f(t), a) + F(t, 0, u, v, -f(t), a) = C(t).$$

Тогда при достаточно малых значениях T задача (3.1)-(3.4) имеет классическое решение $u(t, x)$, непрерывное в замкнутой области Ω_T вместе с производными $u_{tx}(t, x)$, $u_{xx}(t, x)$ и $u_{xxx}(t, x)$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{E}_T$ множество всех пар функций $(u(t, x), a(t))$, где функция $u(t, x)$ непрерывна и ограничена в области Ω_T вместе с производными $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$, $u_{xx}(t, x)$, $u_{xxx}(t, x)$ и $u_{xxx}(t, x)$, а функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Норму в этом множестве определим так:

$$\|(u, a)\|_{\bar{E}_T} = \sup_{\Omega_T} |u(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| +$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{xx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{txx}(t, x)| + \\
& + \sup_{\Omega_T} |u_{xxx}(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |a(t)|.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Очевидно, что $\tilde{E}_T$ банахово пространство.

Оператор $\mathcal{P}$, определённый соотношением (3.20), рассмотрим в пространстве $\tilde{E}_T$. Пользуясь условиями 1-5 данной теоремы и неравенством (3.41), легко показать, что для любых $(u(t, x), a(t)) \in \tilde{E}_T$ $\mathcal{P}(u(t, x), a(t)) = (\tilde{u}(t, x), \tilde{a}(t)) \in \tilde{E}_T$. Оператор $\mathcal{P}$, определённый во всём пространстве $\tilde{E}_T$, рассмотрим только на множестве:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{M}}_0 = \left\{ (u, a) \in \tilde{E}_T : \sup_{\Omega_T} |u(t, x)| \leq \tilde{R}_0, \sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| \leq \tilde{R}_0, \right. \\
\sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| \leq \tilde{R}_0, \sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| \leq \tilde{R}_0, \sup_{\Omega_T} |u_{txx}(t, x)| \leq \tilde{R}_0, \\
\sup_{\Omega_T} |u_{xxx}(t, x)| \leq \tilde{R}_0, \max_{0 \leq t \leq T} |a(t)| \leq \tilde{R}_0 \left. \right\},
\end{aligned} \tag{3.44}$$

где

$$\tilde{R}_0 > \tilde{\gamma}_0 \equiv \max \left\{ \gamma_0, \sup_{x \geq 0} |\varphi'''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'''(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f''(t)| \right\}, \tag{3.45}$$

причём число γ_0 определено соотношением (3.22).

Очевидно, что $\tilde{\mathcal{M}}_0$ является ограниченным, замкнутым и выпуклым множеством банахова пространства $\tilde{E}_T$. Тогда, пользуясь соответствующими условиями данной теоремы и определением оператора $\mathcal{P}$, легко получить, что для любых $(u, a), (u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, наряду с неравенствами (3.23)-(3.34), установленными при доказательстве теоремы 3.1, справедливы и следующие неравенства:

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{ixx}(t, x)| \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi'''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi''(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f''(t)| + q_1(T), \quad (3.46)$$

$$\sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{xxx}(t, x)| \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi'''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi''(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f''(t)| + q_1(T), \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{1,ixx}(t, x) - \tilde{u}_{2,ixx}(t, x)| &\leq q_2(T) \cdot \left\{ \sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \right. \\ &+ \sup_{\Omega_T} |u_{1,i}(t, x) - u_{2,i}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \\ &+ \sup_{\Omega_T} |u_{1,ii}(t, x) - u_{2,ii}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,ix}(t, x) - u_{2,ix}(t, x)| + \\ &+ \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,xxx}(t, x) - u_{2,xxx}(t, x)| + \\ &\left. + \sup_{\Omega_T} |u_{1,xxx}(t, x) - u_{2,xxx}(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| \right\}, \quad (3.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_T} |\tilde{u}_{1,xxx}(t, x) - \tilde{u}_{2,xxx}(t, x)| &\leq q_2(T) \cdot \left\{ \sup_{\Omega_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| + \right. \\ &+ \sup_{\Omega_T} |u_{1,i}(t, x) - u_{2,i}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{\Omega_T} |u_{1,t}(t, x) - u_{2,t}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,x}(t, x) - u_{2,x}(t, x)| + \\
& + \sup_{\Omega_T} |u_{1,xx}(t, x) - u_{2,xx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{1,txx}(t, x) - u_{2,txx}(t, x)| + \\
& + \sup_{\Omega_T} |u_{1,xxx}(t, x) - u_{2,xxx}(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| \Big\}, \quad (3.49)
\end{aligned}$$

где функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ непрерывны по T ($T \geq 0$), причём $q_1(0) = q_2(0) = 0$. Тогда из неравенств (3.23)-(3.28) и (3.46)-(3.47), в силу определения числа $\tilde{R}_0$ (см. (3.45)) следует, что при достаточно малых значениях T $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{M}}_0) \subset \tilde{\mathcal{M}}_0$, а из неравенств (3.29)-(3.34) и (3.48), (3.49) следует, что для любых $(u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \tilde{\mathcal{M}}_0$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}(u_1, a_1) - \mathcal{P}(u_2, a_2)\|_{\tilde{E}_T} &= \|(\tilde{u}_1, \tilde{a}_1) - (\tilde{u}_2, \tilde{a}_2)\|_{\tilde{E}_T} \leq \\
&\leq \tilde{q}(T) \cdot \|(u_1, a_1) - (u_2, a_2)\|_{\tilde{E}_T}, \quad (3.50)
\end{aligned}$$

где $\tilde{q}(T)$ непрерывно зависит от T ($T \geq 0$), причём $\tilde{q}(0) = 0$.

Таким образом, при достаточно малых значениях T оператор $\mathcal{P}$ является в $\tilde{\mathcal{M}}_0$ оператором сжатия. Следовательно, при достаточно малых значениях T оператор $\mathcal{P}$ имеет в $\tilde{\mathcal{M}}_0$ единственную неподвижную точку (u, a) : $\mathcal{P}(u, a) = (\tilde{u}, \tilde{a}) \in \tilde{\mathcal{M}}_0 \subset \tilde{E}_T$. По определению пространства $\tilde{E}_T$ функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$, а функции $u(t, x)$, $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$,

$u_{ix}(t, x)$, $u_{xx}(t, x)$, $u_{ixx}(t, x)$ и $u_{xxx}(t, x)$ непрерывны и ограничены в Ω_T . Далее, совершенно так, как в конце процесса доказательства теоремы 3.1, легко показать, что найденная пара $(\tilde{u}(t, x), \tilde{a}(t)) \in \tilde{E}_T$ является классическим решением задачи (3.1)-(3.4). Кроме того, из равенства, полученного из (3.14) дифференцированием по x один раз, легко видеть, что производная $u_{ix}(t, x)$ также непрерывна в Ω_T . Таким образом, теорема доказана полностью.

Замечание 3.3. Отметим, что классическое решение $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.1)-(3.4), установленное предыдущей теоремой, обладает теми дополнительными (по сравнению с определением классического решения) свойствами, что функции $u(t, x)$, $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $u_{ix}(t, x)$, $u_{xx}(t, x)$, $u_{ixx}(t, x)$ и $u_{xxx}(t, x)$ ограничены в области Ω_T ; кроме того, как видно из (3.14), ограничена в Ω_T также производная $u_{it}(t, x)$ если, например, в неравенстве (3.41) для $s = 0$ $b_R(t) = b_R$, а $u_{ix}(t, x)$ ограничена в Ω_T если, например, в неравенствах (3.41) для $s = 1$ $b_R(t) = b_R$, где $b_R \geq 0$ - постоянная.

§3.2. Единственность (в целом) классического решения задачи (3.1)-(3.4).

В этом параграфе с помощью специального подхода доказывается следующая теорема о единственности классического решения задачи (3.1)-(3.4).

Теорема 3.3. Пусть

1. Функция $F(t, x, u, v, w, a)$ непрерывна в области $[0, T] \times [0, \infty) \times (-\infty, \infty)^4$ по совокупности своих переменных вместе с производными F_x, F_u, F_v и F_w .
2. Для каждого $r > 0$ и $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, r] \times [-R, R]^4$ каждая из функций $F(t, x, u, v, w, a)$, $F_x(t, x, u, v, w, a)$, $F_u(t, x, u, v, w, a)$, $F_v(t, x, u, v, w, a)$ и $F_w(t, x, u, v, w, a)$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных u, v, w и a с коэффициентом Липшица $N_{r,R}$.
3. Для любых $t \in [0, T]$, $u \in [b_0, c_0]$, $v \in [b_1, c_1]$, $w \in [b_2, c_2]$ и $a_1, a_2 \in (-\infty, \infty)$:

$$\left| F(t, 0, u, v, w, a_1) + F(t, 0, u, v, -w, a_1) - \right. \\ \left. - [F(t, 0, u, v, w, a_2) + F(t, 0, u, v, -w, a_2)] \right| \leq N \cdot |a_1 - a_2|, \quad (3.51)$$

где $b_0 = \max_{0 \leq t \leq T} g(t)$, $b_1 = \min_{0 \leq t \leq T} g'(t)$, $b_2 = \min_{0 \leq t \leq T} f(t)$,

$c_0 = \min_{0 \leq t \leq T} g(t)$, $c_1 = \max_{0 \leq t \leq T} g'(t)$, $c_2 = \max_{0 \leq t \leq T} f(t)$ и

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot N = N_0 < 1. \quad (3.52)$$

Тогда задача (3.1)-(3.4) не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. Предположим, что задача (3.1)-(3.4) имеет два различных классических решения $(u_1(t, x), a_1(t))$ и $(u_2(t, x), a_2(t))$. Примем обозначения:

$$u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x), \quad a(t) = a_1(t) - a_2(t). \quad (3.53)$$

Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) &= a(t) \cdot u_{1,t}(t, x) + \{a_2(t) \cdot u_t(t, x) + F(t, x, \\ &u_1(t, x), u_{1,t}(t, x), u_{1,x}(t, x), a_1(t)) - (F(t, x, u_2(t, x), \\ &u_{2,t}(t, x), u_{2,x}(t, x), a_2(t)))\} \quad (0 \leq t \leq T, x \geq 0), \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$u(0, x) = 0 \quad (x \geq 0), \quad u_t(0, x) = 0 \quad (x \geq 0), \quad (3.55)$$

$$u_x(t, 0) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3.56)$$

$$u(t, 0) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (3.57)$$

Далее, функции $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ (а, следовательно, функцию $u(t, x)$) продолжим из области $[0, T] \times [0, \infty)$ в область $[0, T] \times (-\infty, 0)$ формулой

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= u_1(t, -x), \quad u_2(t, x) = u_2(t, -x), \\ u(t, x) &= u(t, -x) \quad (0 \leq t \leq T, x < 0), \end{aligned} \quad (3.58)$$

а функцию $F(t, x, u, v, w, a)$ продолжим из области $[0, T] \times [0, \infty) \times (-\infty, \infty)^4$ в область $[0, T] \times [-\infty, 0) \times (-\infty, \infty)^4$ формулой:

$$F(t, x, u, v, w, a) = F(t, -x, u, v, -w, a). \quad (3.59)$$

В силу (3.56) очевидно, что функция $u(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $[0, T] \times (-\infty, \infty)$. Тогда, пользуясь соотношениями (3.58) и (3.59), из (3.54)-(3.57) получаем:

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = a(t) \cdot u_{1,t}(t, x) + \{a_2(t) \cdot u_t(t, x) + F(t, x, u_1(t, x), u_{1,t}(t, x), u_{1,x}(t, x), a_1(t)) - (F(t, x, u_2(t, x), u_{2,t}(t, x), u_{2,x}(t, x), a_2(t)))\} \quad (0 \leq t \leq T, -\infty < x < \infty), \quad (3.60)$$

$$u(0, x) = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad u_t(0, x) = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad (3.61)$$

$$u_x(t, 0) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3.62)$$

$$u(t, 0) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3.63)$$

причём в равенстве (3.60) при $x = 0$ под $u_{1,x}(t, 0)$ и $u_{2,x}(t, 0)$ понимаем следующее:

$$u_{1,x}(t, 0) = u_{1,x}(t, +0) = f(t), \quad u_{2,x}(t, 0) = u_{2,x}(t, +0) = f(t). \quad (3.64)$$

По формуле Даламбера из (3.60) и (3.61) имеем:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} a(\tau) \cdot u_{1,\tau}(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} a_2(\tau) \cdot u_{2,\tau}(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \{F(\tau, \xi, u_1(\tau, \xi), u_{1,\tau}(\tau, \xi), u_{1,\xi}(\tau, \xi), a_1(\tau)) -$$

$$-F(\tau, \xi, u_2(\tau, \xi), u_{2,\tau}(\tau, \xi), u_{2,\xi}(\tau, \xi), a_2(\tau))\} d\xi d\tau$$

$$(0 \leq t \leq T, -\infty < x < \infty). \quad (3.65)$$

Далее, подставив выражение (3.65) в условие (3.63), дифференцируя полученное равенство два раза по t ($t \in [0, T]$), пользуясь соотношениями $u_1(t, 0) = u_2(t, 0) = g(t)$, $u_{1,t}(t, 0) = u_{2,t}(t, 0) = g'(t)$, $u_{1,x}(t, 0) = u_{2,x}(t, 0) = f(t)$, $u_t(t, 0) = 0$ и разрешая в результате полученное равенство относительно $a(t)$, причём имея в виду, что для любого t $g'(t) \neq 0$, получаем:

$$a(t) = -\frac{1}{g'(t)} \cdot \left(\int_0^t a(\tau) \cdot u_{1,\tau\xi}(\tau, t-\tau) d\tau + \int_0^t a_2(\tau) \cdot u_{\tau\xi}(\tau, t-\tau) d\tau + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \{ F(t, 0, g(t), g'(t), f(t), a_1(t)) - F(t, 0, g(t), g'(t),$$

$$f(t), a_2(t)) + F(t, 0, g(t), g'(t), -f(t), a_1(t)) - F(t, 0, g(t),$$

$$g'(t), -f(t), a_2(t)) \} + \frac{1}{2} \int_0^t \{ F_x(\tau, t-\tau, u_1(\tau, t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, t-\tau),$$

$$u_{1,\xi}(\tau, t-\tau), a_1(\tau)) - F_x(\tau, t-\tau, u_2(\tau, t-\tau), u_{2,\tau}(\tau, t-\tau),$$

$$u_{2,\xi}(\tau, t-\tau), a_2(\tau)) + F_u(\tau, t-\tau, u_1(\tau, t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, t-\tau),$$

$$u_{1,\xi}(\tau, t-\tau), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\xi}(\tau, t-\tau) - F_u(\tau, t-\tau, u_2(\tau, t-\tau),$$

$$u_{2,\tau}(\tau, t-\tau), u_{2,\xi}(\tau, t-\tau), a_2(\tau)) \cdot u_{2,\xi}(\tau, t-\tau) + F_v(\tau, t-\tau,$$

$$u_1(\tau, t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, t-\tau), u_{1,\xi}(\tau, t-\tau), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\tau\xi}(\tau, t-\tau) -$$

$$\begin{aligned}
& -F_v(\tau, t-\tau, u_2(\tau, t-\tau), u_{2,\tau}(\tau, t-\tau), u_{2,\xi}(\tau, t-\tau), a_2(\tau)) \times \\
& \times u_{2,\tau\xi}(\tau, t-\tau) + F_w(\tau, t-\tau, u_1(\tau, t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, t-\tau), \\
& u_{1,\xi}(\tau, t-\tau), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\tau\xi}(\tau, t-\tau) - F_w(\tau, t-\tau, u_2(\tau, t-\tau), \\
& u_{2,\tau}(\tau, t-\tau), u_{2,\xi}(\tau, t-\tau), a_2(\tau)) \cdot u_{2,\tau\xi}(\tau, t-\tau) + F_x(\tau, t-\tau, \\
& u_1(\tau, t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, t-\tau), -u_{1,\xi}(\tau, t-\tau), a_1(\tau)) - F_x(\tau, t-\tau, \\
& u_2(\tau, t-\tau), u_{2,\tau}(\tau, t-\tau), -u_{2,\xi}(\tau, t-\tau), a_2(\tau)) + F_u(\tau, t-\tau, \\
& u_1(\tau, t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, t-\tau), -u_{1,\xi}(\tau, t-\tau), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\tau\xi}(\tau, t-\tau) - \\
& -F_u(\tau, t-\tau, u_2(\tau, t-\tau), u_{2,\tau}(\tau, t-\tau), -u_{2,\xi}(\tau, t-\tau), a_2(\tau)) \times \\
& \times u_{2,\tau\xi}(\tau, t-\tau) + F_v(\tau, t-\tau, u_1(\tau, t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, t-\tau), \\
& -u_{1,\xi}(\tau, t-\tau), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\tau\xi}(\tau, t-\tau) - F_v(\tau, t-\tau, u_2(\tau, t-\tau), \\
& u_{2,\tau}(\tau, t-\tau), -u_{2,\xi}(\tau, t-\tau), a_2(\tau)) \cdot u_{2,\tau\xi}(\tau, t-\tau) - F_w(\tau, t-\tau, \\
& u_1(\tau, t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, t-\tau), -u_{1,\xi}(\tau, t-\tau), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\tau\xi}(\tau, t-\tau) + \\
& + F_w(\tau, t-\tau, u_2(\tau, t-\tau), u_{2,\tau}(\tau, t-\tau), -u_{2,\xi}(\tau, t-\tau), a_2(\tau)) \times \\
& \times u_{2,\tau\xi}(\tau, t-\tau) \} d\tau \Big) (0 \leq t \leq T). \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Из (3.65) легко получить, что для любых $t \in [0, T]$ и $x \in (-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned}
u_t(t, x) = & \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) \cdot \{u_{1,\tau}(\tau, x+t-\tau) + u_{1,\tau}(\tau, x-(t-\tau))\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t a_2(\tau) \cdot \{u_\tau(\tau, x+t-\tau) + u_\tau(\tau, x-(t-\tau))\} d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^t \{F(\tau, x+t-\tau, u_1(\tau, x+t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, x+t-\tau), \\
& u_{1,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_1(\tau)) - F(\tau, x+t-\tau, u_2(\tau, x+t-\tau), \\
& u_{2,\tau}(\tau, x+t-\tau), u_{2,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_2(\tau)) + F(\tau, x-(t-\tau), \\
& u_1(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), \\
& a_1(\tau)) - F(\tau, x-(t-\tau), u_2(\tau, x-(t-\tau)), u_{2,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_{2,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), a_2(\tau))\} d\tau, \quad (3.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x(t, x) = & \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) \cdot \{u_{1,\tau}(\tau, x+t-\tau) - u_{1,\tau}(\tau, x-(t-\tau))\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t a_2(\tau) \cdot \{u_\tau(\tau, x+t-\tau) - u_\tau(\tau, x-(t-\tau))\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \{F(\tau, x+t-\tau, u_1(\tau, x+t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, x+t-\tau), \\
& u_{1,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_1(\tau)) - F(\tau, x+t-\tau, u_2(\tau, x+t-\tau), \\
& u_{2,\tau}(\tau, x+t-\tau), u_{2,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_2(\tau)) - F(\tau, x-(t-\tau), \\
& u_1(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), \\
& a_1(\tau)) + F(\tau, x-(t-\tau), u_2(\tau, x-(t-\tau)), u_{2,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_{2,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), a_2(\tau))\} d\tau, \quad (3.68)
\end{aligned}$$

$$u_{tx}(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) \cdot \{u_{1,\tau x}(\tau, x+t-\tau) + u_{1,\tau x}(\tau, x-(t-\tau))\} d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& u_{2,x}(\tau, x+t-\tau), u_{2,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_2(\tau)) \cdot u_{2,\xi}(\tau, x+t-\tau) + \\
& + F_v(\tau, x+t-\tau, u_1(\tau, x+t-\tau), u_{1,\tau}(\tau, x+t-\tau), \\
& u_{1,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\xi}(\tau, x+t-\tau) - F_v(\tau, x+t-\tau, \\
& u_2(\tau, x+t-\tau), u_{2,x}(\tau, x+t-\tau), u_{2,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_2(\tau)) \times \\
& \times u_{2,\xi}(\tau, x+t-\tau) + F_w(\tau, x+t-\tau, u_1(\tau, x+t-\tau), \\
& u_{1,\tau}(\tau, x+t-\tau), u_{1,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\xi}(\tau, x+t-\tau) - \\
& - F_w(\tau, x+t-\tau, u_2(\tau, x+t-\tau), u_{2,x}(\tau, x+t-\tau), \\
& u_{2,\xi}(\tau, x+t-\tau), a_2(\tau)) \cdot u_{2,\xi}(\tau, x+t-\tau) - F_x(\tau, x-(t-\tau), \\
& u_1(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), \\
& a_1(\tau)) + F_x(\tau, x-(t-\tau), u_2(\tau, x-(t-\tau)), u_{2,\tau}(\tau, \\
& x-(t-\tau)), u_{2,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), a_2(\tau)) - F_u(\tau, x-(t-\tau), \\
& u_1(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), \\
& a_1(\tau)) \cdot u_{1,\xi}(\tau, x-(t-\tau)) + F_u(\tau, x-(t-\tau), u_2(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_{2,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), u_{2,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), a_2(\tau)) \cdot u_{2,\xi}(\tau, x-(t-\tau)) - \\
& - F_v(\tau, x-(t-\tau), u_1(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), \\
& u_{1,\xi}(\tau, x-(t-\tau)), a_1(\tau)) \cdot u_{1,\xi}(\tau, x-(t-\tau)) + F_v(\tau, \\
& x-(t-\tau), u_2(\tau, x-(t-\tau)), u_{2,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), u_{2,\xi}(\tau, \\
& x-(t-\tau)), a_2(\tau)) \cdot u_{2,\xi}(\tau, x-(t-\tau)) - F_w(\tau, x-(t-\tau), \\
& u_1(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\tau}(\tau, x-(t-\tau)), u_{1,\xi}(\tau, x-(t-\tau)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_1(\tau)) \cdot u_{1,\xi\xi}(\tau, x - (t - \tau)) + F_w(\tau, x - (t - \tau), \\
 & u_2(\tau, x - (t - \tau)), u_{2,\tau}(\tau, x - (t - \tau)), u_{2,\xi}(\tau, x - (t - \tau)), \\
 & a_2(\tau)) \cdot u_{2,\xi\xi}(\tau, x - (t - \tau)) \} d\tau. \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

Из (3.65) видно, что $u(0, x) = 0$ для любого $x \in [0, \infty)$. А из (3.66), пользуясь условием 3 данной теоремы и обозначением $a_1(t) - a_2(t) = a(t)$, получаем:

$$|a(0)| \leq N_0 \cdot |a(0)|,$$

где $N_0 < 1$. Следовательно, $a(0) = 0$. Таким образом, имеем:

$$a(0) = 0, \quad u(0, x) = 0 \quad \forall x \in [0, \infty). \quad (3.71)$$

Теперь фиксируем любое X_0 , удовлетворяющее условию $T \leq X_0 < +\infty$, и примем обозначения:

$$G_{X_0, t} \equiv \{(\tau, x) : \tau \in [0, t], 0 \leq x \leq X_0 - \tau\}, \quad t \in [0, T]; \quad (3.72)$$

$$T^* \equiv \max\{t : t \in [0, T], a(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0, t],$$

$$u(\tau, x) = 0 \quad \forall (\tau, x) \in G_{X_0, t}\}. \quad (3.73)$$

Очевидно, что $0 \leq T^* \leq T$. Предположим, что

$$T^* < T. \quad (3.74)$$

Рассмотрим любое $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условию $T^* + \varepsilon \leq T$. Очевидно, что существует такое R_0 ($0 < R_0 < +\infty$), что для любых $t \in [0, T]$ и для любых $(t, x) \in G_{X_0, T}$ каждая из функций $a(t), a_t(t), u_t(t, x), u_{t,t}(t, x), u_{t,x}(t, x), u_{t,tx}(t, x), u_{t,xx}(t, x),$

$F(t, x, u_i(t, x), u_{i,j}(t, x), u_{i,x}(t, x), a_i(t)), F_x(t, x, u_i(t, x), u_{i,j}(t, x), u_{i,x}(t, x), a_i(t)), F_u(t, x, u_i(t, x), u_{i,j}(t, x), u_{i,x}(t, x), a_i(t)), F_v(t, x, u_i(t, x), u_{i,j}(t, x), u_{i,x}(t, x), a_i(t)), F_w(t, x, u_i(t, x), u_{i,j}(t, x), u_{i,x}(t, x), a_i(t))$ по абсолютной величине ограничена этим числом R_0 , где $i = 1, 2$.

Тогда, пользуясь условиями 2,3 данной теоремы, определением числа T^* и обозначениями (3.53), из соотношений (3.65)-(3.70) легко получить, что для любого $\varepsilon (0 < \varepsilon \leq T - T^*)$:

$$\begin{aligned} \max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| &\leq \frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \cdot \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \cdot R_0 \times \\ &\times \max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| \cdot \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \cdot N_{X_0, R_0} \times \\ &\times \left(\max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \right. \\ &\left. + \max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| &\leq R_0 \cdot \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \cdot \varepsilon + \sqrt{2} \cdot R_0 \times \\ &\times \max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| \cdot \varepsilon + \sqrt{2} \cdot N_{X_0, R_0} \cdot \varepsilon \times \\ &\times \left(\max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{T_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \right. \end{aligned}$$

$$+ \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \Big), \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| &\leq R_0 \cdot \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \cdot \varepsilon + \sqrt{2} \cdot R_0 \times \\ &\times \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| \cdot \varepsilon + \sqrt{2} \cdot N_{\lambda_0, R_0} \cdot \varepsilon \times \\ &\times \left(\max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \right. \\ &\left. + \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \right), \quad (3.77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_{xx}(t, x)| &\leq R_0 \cdot \varepsilon \cdot \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| + \sqrt{2} \cdot R_0 \cdot \varepsilon \times \\ &\times \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_{tx}(t, x)| + \sqrt{2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \right. \\ &+ \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \\ &+ \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \Big) \cdot (1 + 3R_0) \cdot N_{\lambda_0, R_0} + \\ &+ \left(\max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \max_{G_{\lambda_0, T^* + \varepsilon}} |u_{tx}(t, x)| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{xx}(t, x)| \cdot R_0 \Big\} \leq \sqrt{2} \max \{2R_0, R_0 + \\
& + (1 + 3R_0) \cdot N_{X_0, R_0}\} \cdot \varepsilon \cdot \left(\max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \right. \\
& + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \\
& + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{tx}(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{xx}(t, x)| + \\
& \left. + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \right), \tag{3.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{tx}(t, x)| & \leq \sqrt{2} \cdot \max \{2R_0, R_0 + (1 + 3R_0) \cdot N_{X_0, R_0}\} \times \\
& \times \varepsilon \cdot \left(\max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \right. \\
& + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{tx}(t, x)| + \\
& \left. + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{xx}(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \right), \tag{3.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq T + \varepsilon} |a(t)| & \leq N_0 \cdot \max_{0 \leq t \leq T + \varepsilon} |a(t)| + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \sqrt{2} \cdot \varepsilon \times \\
& \times \left\{ \left(\max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \right. \right. \\
& \left. \left. + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times (1 + 3R_0) \cdot N_{X_0, R_0} + \left(\max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \right. \\ \left. + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{tx}(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{xx}(t, x)| \right) \cdot R_0 \Big\}.$$

Из последнего неравенства, пользуясь тем, что $N_0 < 1$, получаем:

$$\max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \leq \frac{1}{N_0 - 1} \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot \sqrt{2} \cdot [R_0 + \max\{R_0, \\ (1 + 3R_0) \cdot N_{X_0, R_0}\} \cdot \varepsilon \cdot \left(\max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \right. \\ \left. + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \right. \\ \left. + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{tx}(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{xx}(t, x)| + \right. \\ \left. + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \right)]. \quad (3.80)$$

Таким образом, из неравенств (3.75)-(3.80) получаем, что для любого ε ($0 < \varepsilon \leq T - T^*$):

$$\max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \\ + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{tx}(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{xx}(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| \leq \\ \leq C_0 \cdot \varepsilon \cdot \left(\max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_t(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \right.$$

$$+ \max_{G_{X_0, T^* - \varepsilon}} |u_{\alpha}(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{\beta}(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)|, \quad (3.81)$$

где $C_0 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от ε .

Пусть ε^* ($0 < \varepsilon^* \leq T - T^*$) такое, что $C_0 \cdot \varepsilon^* < 1$. Тогда из (3.81) следует, что

$$\begin{aligned} & \max_{G_{X_0, T^* - \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_x(t, x)| + \\ & + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{\alpha}(t, x)| + \max_{G_{X_0, T^* + \varepsilon}} |u_{\beta}(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T^* + \varepsilon} |a(t)| = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T^* + \varepsilon^*], \quad u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in G_{X_0, T^* + \varepsilon^*}.$$

А это соотношение, в силу положительности числа ε^* , противоречит определению, т.е. максимальности числа T^* . Полученное противоречие показывает, что $T^* < T$ не может быть, т.е. $T^* = T$. А это означает следующее:

$$a(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in G_{X_0, T}.$$

Так как последнее из равенств (3.82) справедливо для любого $X_0 \geq T$, то имеем:

$$u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \bigcup_{X_0 \geq T} G_{X_0, T} = [0, T] \times [0, \infty).$$

Таким образом, получаем, что

$$a_1(t) = a_2(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad u_1(t, x) = u_2(t, x) \quad \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

А это противоречит предположению о различности классических решений $(u_1(t, x), a_1(t))$ и $(u_2(t, x), a_2(t))$ задачи (3.1)-(3.4). Теорема доказана.

Замечание 3.4. Отметим, что для выполнения условия 3 теоремы 3.3 достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

для любых $t \in [0, T]$, $u \in [b_0, c_0]$, $v \in [b_1, c_1]$, $w \in [b_2, c_2]$,

$a_1, a_2 \in (-\infty, \infty)$

$$|F(t, 0, u, v, w, a_1) - F(t, 0, u, v, w, a_2)| \leq N_1 \cdot |a_1 - a_2|,$$

а для любых $t \in [0, T]$, $u \in [b_0, c_0]$, $v \in [b_1, c_1]$,

$w \in [-c_2, b_2]$, $a_1, a_2 \in (-\infty, \infty)$

$$|F(t, 0, u, v, w, a_1) - F(t, 0, u, v, w, a_2)| \leq N_2 \cdot |a_1 - a_2|,$$

где

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot (N_1 + N_2) \equiv N_0 < 1.$$

Кроме того, для выполнения условия 4 теоремы 3.3 также достаточно, чтобы для любых $t \in [0, T]$ и $a \in (-\infty, \infty)$ было

$$F(t, 0, g(t), g'(t), f(t), a) + F(t, 0, g(t), g'(t), -f(t), a) = h(t). \quad (3.83)$$

В свою очередь, для выполнения условия (3.83) достаточно, чтобы для любых $t \in [0, T]$, $u \in [b_0, c_0]$, $v \in [b_1, c_1]$, $w \in [b_2, c_2] \cup$

$\cup [-c_2, -b_2]$ и $a \in (-\infty, \infty)$ функция $F(t, 0, u, v, w, a)$ не зависела от a , например, $F(t, 0, u, v, w, a) \equiv 0$.

§3.3. Априорные оценки для классических решений задачи (3.1)-(3.4).

В этом параграфе рассматривается специальный случай уравнения (3.1), когда оно имеет вид

$$u_{tx} - u_{xx} = f(x, u) + \Phi(t, x, u, u_t, u_x, a) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x < +\infty), \quad (3.84)$$

и для классических решений задачи (3.84), (3.2)-(3.4) устанавливаются различные априорные оценки.

В дальнейшем, для удобства, будем пользоваться следующим обозначением:

$$h(t, x, u, u_t, u_x, a) = f(x, u) + \Phi(t, x, u, u_t, u_x, a). \quad (3.85)$$

Теорема 3.4. Пусть

$$1. \int_0^\infty (\varphi'(x))^2 dx < +\infty, \int_0^\infty \psi^2(x) dx < +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0.$$

3. Функция $f(x, u)$ непрерывна по совокупности своих переменных в области $[0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ и в этой же области

$$\int_0^u f(x, \xi) d\xi \equiv f_0(x, u) \leq a_0(x) - C_0 \cdot u^2 - g_0(u), \quad (3.86)$$

где $0 \leq a_0(x) \in L(0, \infty)$, $C_0 > 0$ - постоянная, а функция

$$g_0(u) \geq 0 \text{ непрерывна в } (-\infty, \infty); \text{ кроме того, } \left| \int_0^\infty f_0(x, \varphi(x)) dx \right| <$$

$< +\infty$.

4. Функция $\Phi(t, x, u, v, w, a)$ непрерывна по совокупности своих переменных в области $[0, T] \times [0, \infty) \times (-\infty, \infty)^4$ и в этой же области

$$\Phi(t, x, u, v, w, a) \cdot v \leq C(t) \cdot \{g_0(u) + u^2 + v^2 + w^2\} + b(t, x), \quad (3.87)$$

где $0 \leq C(t) \in L(0, T)$, $0 \leq b(t, x) \in L(\Omega_T)$, $\Omega_T \equiv [0, T] \times [0, \infty)$.

5. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, \infty) \times [-R, R]^4$

$$|h(t, x, u, v, w, a)| \leq b_R(t, x), \quad (3.88)$$

где функция $h(t, x, u, v, w, a)$ определена соотношением (3.85) и для каждого $t \in [0, T]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^t b_R(\tau, x + t - \tau) d\tau = 0, \quad (3.89)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^t b_R(\tau, x - (t - \tau)) d\tau = 0. \quad (3.90)$$

Тогда для первой компоненты $u(t, x)$, ограниченной в Ω_T вместе с производными $u_t(t, x)$ и $u_x(t, x)$, любого классического решения $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.84), (3.2)-(3.4) справедливы следующие априорные оценки:

$$\int_0^{\infty} \{g_0(u(t,x)) + u^2(t,x) + u_t^2(t,x) + u_x^2(t,x)\} dx \leq R_0$$

$$\forall t \in [0, T], \quad (3.91)$$

$$\sup_{\Omega_t} |u(t,x)| \leq R_0. \quad (3.92)$$

Доказательство. Умножив обе части уравнения (3.84) на $2u_t(t,x)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до N (N - любое фиксированное натуральное число), причём произведя интегрирование по частям один раз во втором слагаемом в левой части и, пользуясь условиями (3.3), (3.4) и соотношением $\int_0^N f(x, u(t,x)) \cdot u_t(t,x) dx = \frac{d}{dt} \int_0^N f_0(x, u(t,x)) dx$, легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^N u_t^2(t,x) dx + \frac{d}{dt} \int_0^N u_x^2(t,x) dx &= 2u_t(t,N) \cdot u_x(t,N) - \\ &- 2f(t) \cdot g'(t) + 2 \frac{d}{dt} \int_0^N f_0(x, u(t,x)) dx + \\ &+ 2 \int_0^N \Phi(t, x, u(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x), a(t)) \cdot u_t(t,x) dx. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Интегрируя последнее равенство по t от 0 до t , пользуясь начальными условиями (3.2), неравенствами (3.86), (3.87) и перебросив некоторые слагаемые из правой части в левую, легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^N u_t^2(t, x) dx + \int_0^N u_x^2(t, x) dx + 2C_0 \cdot \int_0^N u^2(t, x) dx + 2 \int_0^N g_0(u(t, x)) dx \leq \\
& \leq \int_0^N \psi^2(x) dx + \int_0^N (\varphi'(x))^2 dx - 2 \int_0^t f(\tau) g'(\tau) d\tau - \\
& - 2 \int_0^N f_0(x, \varphi(x)) dx + 2 \int_0^N a_0(x) dx + 2 \int_0^t \int_0^N b(\tau, x) dx d\tau + \\
& + 2 \int_0^t u_t(\tau, N) \cdot u_x(\tau, N) d\tau + 2 \int_0^t C(\tau) \left\{ \int_0^N u_\tau^2(\tau, x) dx + \right. \\
& \left. + \int_0^N u_x^2(\tau, x) dx + \int_0^N u^2(\tau, x) dx + \int_0^N g_0(u(\tau, x)) dx \right\} d\tau. (3.94)
\end{aligned}$$

Из (3.94), приняв обозначение

$$\frac{1}{\min\{1, C_0\}} = C_1,$$

получаем, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^N u_t^2(t, x) dx + \int_0^N u_x^2(t, x) dx + \int_0^N u^2(t, x) dx + \int_0^N g_0(u(t, x)) dx \leq \\
& \leq C_1 \cdot \left\{ \int_0^\infty \psi^2(x) dx + \int_0^\infty (\varphi'(x))^2 dx + 2 \int_0^T |f(t) g'(t)| dt + \right. \\
& + 2 \int_0^\infty a_0(x) dx + 2 \int_0^T \int_0^\infty b(t, x) dx dt - 2 \int_0^N f_0(x, \varphi(x)) dx + \\
& \left. + 2 \int_0^t u_t(\tau, N) \cdot u_x(\tau, N) d\tau \right\} + \int_0^t 2C_1 \cdot C(\tau) \left\{ \int_0^N u_\tau^2(\tau, x) dx + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^N u_x^2(\tau, x) dx + \int_0^N u^2(\tau, x) dx + \int_0^N g_0(u(\tau, x)) dx \} d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что для любых N и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^N u_t^2(t, x) dx + \int_0^N u_x^2(t, x) dx + \int_0^N u^2(t, x) dx + \int_0^N g_0(u(t, x)) dx \leq \\ & \leq C_1 \cdot e^{2C_1 \int_0^T C(\tau) d\tau} \cdot \left\{ \int_0^\infty \psi^2(x) dx + \int_0^\infty (\varphi'(x))^2 dx + \right. \\ & + 2 \int_0^T |f(t)g'(t)| dt + 2 \int_0^\infty a_0(x) dx + 2 \int_0^T \int_0^\infty b(t, x) dx dt - \\ & \left. - 2 \int_0^N f_0(x, \varphi(x)) dx + 2 \int_0^t \int_0^N u_t(\tau, N) \cdot u_x(\tau, N) d\tau \right\}. \quad (3.95) \end{aligned}$$

Примем обозначение:

$$\Omega^* \equiv \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, t \leq x < +\infty\}. \quad (3.96)$$

Очевидно, что в силу формулы Даламбера, функция $u(t, x)$ удовлетворяет в области Ω^* уравнению:

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} (h(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi), a(\tau))) d\xi d\tau, \quad (3.97) \end{aligned}$$

где функция $h(t, x, u, u_t, u_x, a)$ определена соотношением (3.85). Отсюда, в свою очередь, получаем:

$$u_t(t, x) = \frac{\varphi'(x+t) - \varphi'(x-t)}{2} + \frac{\psi(x+t) + \psi(x-t)}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \{h(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\ u_x(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) + h(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), \\ u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_x(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau))\} d\tau \quad (\forall (t, x) \in \Omega^*), (3.98)$$

$$u_x(t, x) = \frac{\varphi'(x+t) + \varphi'(x-t)}{2} + \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \{h(\tau, x+t-\tau, u(\tau, x+t-\tau), u_\tau(\tau, x+t-\tau), \\ u_x(\tau, x+t-\tau), a(\tau)) - h(\tau, x-(t-\tau), u(\tau, x-(t-\tau)), \\ u_\tau(\tau, x-(t-\tau)), u_x(\tau, x-(t-\tau)), a(\tau))\} d\tau \quad (\forall (t, x) \in \Omega^*). (3.99)$$

Так как функция $u(t, x)$ ограничена в области Ω_T вместе с производными $u(t, x)$ и $u_t(t, x)$, то существует такое $R > 0$, что в области Ω_T :

$$|u(t, x)| \leq R, \quad |u_t(t, x)| \leq R, \quad |u_x(t, x)| \leq R. \quad (3.100)$$

Тогда, пользуясь условием 2 данной теоремы и соотношениями (3.88)-(3.90) (т.е. условием 5 данной теоремы), из (3.98) и (3.99) легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_t(t, N) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} u_x(t, N) = 0. \quad (3.101)$$

Тогда, очевидно, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t u_t(\tau, N) u_x(\tau, N) d\tau = 0. \quad (3.102)$$

Кроме того, как видно из условия 3 данной теоремы, существует конечный предел:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f_0(x, \varphi(x)) dx = \int_0^{\infty} f_0(x, \varphi(x)) dx. \quad (3.103)$$

Теперь, пользуясь соотношениями (3.102) и (3.103) и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, из (3.95) получаем, что:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} u_t^2(t, x) dx + \int_0^{\infty} u_x^2(t, x) dx + \int_0^{\infty} u^2(t, x) dx + \\ & + \int_0^{\infty} g_0(u(t, x)) dx \leq C_2 \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.104)$$

где

$$\begin{aligned} C_2 = & C_1 \cdot e^{2C_1 \int_0^T C(\tau) d\tau} \left\{ \int_0^{\infty} \psi^2(x) dx + \int_0^{\infty} (\varphi'(x))^2 dx + \right. \\ & + 2 \int_0^T |f(t)g'(t)| dt + 2 \int_0^{\infty} a_0(x) dx + 2 \int_0^T \int_0^{\infty} b(t, x) dx dt - \\ & \left. - 2 \int_0^{\infty} f_0(x, \varphi(x)) dx \right\}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь априорной оценкой (3.104), легко получить, что для любых $(t, x) \in \Omega_T$:

$$\begin{aligned} u^2(t, x) &= u^2(t, 0) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} (u^2(t, \xi)) d\xi = g^2(t) + \\ &+ 2 \int_0^x u(t, \xi) u_\xi(t, \xi) d\xi \leq g^2(t) + 2 \left\{ \int_0^x u^2(t, \xi) d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \int_0^x u_\xi^2(t, \xi) d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left(\max_{0 \leq t \leq T} |g(t)| \right)^2 + 2C_2 \equiv C_3. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Таким образом, из (3.104) и (3.105) следует справедливость априорных оценок (3.91) и (3.92). Теорема доказана.

Замечание 3.5. Очевидно, что условия (3.89) и (3.90), фигурирующие в условии 5 теоремы 4, равносильны соответственно следующим условиям:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^T b_R(\tau, x + T - \tau) d\tau = 0, \quad (3.106)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^T b_R(\tau, x - (T - \tau)) d\tau = 0. \quad (3.107)$$

А для выполнения условий (3.106) и (3.107) достаточно, чтобы функция $b_R(t, x)$, фигурирующая в (3.88), имела вид

$$b_R(t, x) = \tilde{b}_R(x), \text{ причём } \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{b}_R(x) = 0.$$

Теорема 3.5. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.4.

$$2. \int_0^{\infty} (\varphi''(x))^2 dx < +\infty, \int_0^{\infty} (\psi'(x))^2 dx < +\infty.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi''(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \psi'(x) = 0.$$

4. Для любых $t \in [0, T]$ и $a \in (-\infty, \infty)$

$$f'(t) \cdot h(t, 0, g(t), g'(t), f(t), a) \leq e(t), \quad 0 \leq e(t) \in L(0, T), \quad (3.108)$$

где функция $h(t, x, u, u_x, a)$ определена соотношением (3.85).

5. Функция $h(t, x, u, v, w, a)$, определённая соотношением (3.85), непрерывна по совокупности своих переменных в области $[0, T] \times [0, \infty) \times (-\infty, \infty)^4$ вместе с производными h_x , h_u , h_v и h_w , причём каждая из них удовлетворяет условию 5 теоремы 3.4 (т.е. неравенству (3.88)).

6. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, \infty) \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^3$:

$$а) |h_r(t, x, u, v, w, a)| \leq C_R(t) \cdot (|v|^3 + |w|^3), \quad (3.109)$$

$$б) |h_u(t, x, u, v, w, a)| \leq C_R(t) \cdot (v^2 + w^2), \quad (3.110)$$

$$в) h_v(t, x, u, v, w, a) \leq d_R(t), \quad (3.111)$$

$$г) |h_w(t, x, u, v, w, a)| \leq d_R(t), \quad (3.112)$$

где $0 \leq C_R(t) \in L_2(0, T)$, $0 \leq d_R(t) \in L(0, T)$.

Тогда для первой компоненты $u(t, x)$, ограниченной в Ω_T вместе с производными $u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)$ и имеющей в Ω_T непрерывные производные $u_{txx}(t, x)$ и $u_{xxx}(t, x)$, любого классического решения $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.84), (3.2)-(3.4) справедливы априорные оценки (3.91) и (3.92) и априорные оценки:

$$\int_0^{\infty} u_{tx}^2(t, x) dx + \int_0^{\infty} u_{xx}^2(t, x) dx \leq R_1, \quad (3.113)$$

$$\sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| \leq R_1, \quad \sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| \leq R_1. \quad (3.114)$$

Доказательство. По предыдущей теореме 3.4 для функций $u(t, x)$ справедливы априорные оценки (3.91) и (3.92). Далее, дифференцируя уравнение (3.84) один раз по x , умножая обе части полученного равенства на $2u_{tx}(t, x)$, интегрируя последнее равенство по x от 0 до N (N - любое фиксированное натуральное число), причём произведя интегрирование по частям один раз во втором слагаемом в левой части и, пользуясь условиями (3.3), (3.4) и соотношением

$$u_{xx}(t, 0) = g''(t) - h(t, 0, g(t), g'(t), f(t), a(t)), \quad (3.115)$$

затем, интегрируя последнее полученное равенство по t от 0 до t и пользуясь начальными условиями (3.2), легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^N u_{tx}^2(t, x) dx + \int_0^N u_{xx}^2(t, x) dx = \int_0^N (\psi'(x))^2 dx + \int_0^N (\varphi''(x))^2 dx + \\
& + 2 \int_0^t u_{xx}(\tau, N) u_{xx}(\tau, N) d\tau - 2 \int_0^t f'(\tau) g''(\tau) d\tau + 2 \int_0^t f'(\tau) h(\tau, 0, \\
& g(\tau), g'(\tau), f(\tau), a(\tau)) d\tau + 2 \int_0^t \int_0^N \{ h_x(\tau, x, u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), u_x(\tau, x), \\
& a(\tau)) + h_u(\tau, x, u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), u_x(\tau, x), a(\tau)) \cdot u_x(\tau, x) + h_t(\tau, x, \\
& u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), u_x(\tau, x), a(\tau)) \cdot u_{xx}(\tau, x) + h_w(\tau, x, u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), \\
& u_x(\tau, x), a(\tau)) \cdot u_{xx}(\tau, x) \} \cdot u_{xx}(\tau, x) dx d\tau, \quad (3.116)
\end{aligned}$$

где функция $h(t, x, u, u_t, u_x, a)$ определена соотношением (3.85). Совершенно аналогично неравенству (3.105), для любых $t \in [0, T]$ и $x \in [0, \infty)$ имеем:

$$u_t^2(t, x) \leq (g'(t))^2 + 2 \left\{ \int_0^x u_t^2(t, \xi) d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_0^x u_{tx}^2(t, x) d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.117)$$

$$u_x^2(t, x) \leq f^2(t) + 2 \left\{ \int_0^x u_x^2(t, \xi) d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_0^x u_{tx}^2(t, \xi) d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.118)$$

Далее, пользуясь априорными оценками (3.91), (3.92), неравенствами (3.109)-(3.112) и оценками (3.117), (3.118), легко получить, что любого $\tau \in [0, T]$:

$$2 \int_0^N |h_x(\tau, x, u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), u_x(\tau, x), a(\tau)) \cdot u_{xx}(\tau, x)| dx \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + \int_0^N \{h_x(\tau, x, u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), u_x(\tau, x), a(\tau))\}^2 dx \leq \\
&\leq 2 \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + 2C_{R_0}^2(\tau) \cdot \left\{ \int_0^N u_\tau^4(\tau, x) \cdot u_\tau^2(\tau, x) dx + \right. \\
&+ \left. \int_0^N u_x^4(\tau, x) \cdot u_x^2(\tau, x) dx \right\} \leq \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + 2C_{R_0}^2(\tau) \times \\
&\times \left\{ \left[2(g'(\tau))^4 + 4 \int_0^N u_\tau^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx \right] \cdot \int_0^N u_\tau^2(\tau, x) dx + \right. \\
&+ \left. \left[2f^4(\tau) + 4 \int_0^N u_x^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx \right] \cdot \int_0^N u_x^2(\tau, x) dx \leq \right. \\
&\leq 4R_0 \cdot C_{R_0}^2(\tau) \cdot \left\{ \left(\max_{0 \leq t \leq T} |g'(t)| \right)^4 + \left(\max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \right)^4 \right\} + \\
&+ \{1 + 8R_0^2 \cdot C_{R_0}^2(\tau)\} \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + 8R_0^2 \cdot C_{R_0}^2(\tau) \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx, (3.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2 \int_0^N |h_u(\tau, x, u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), u_x(\tau, x), a(\tau)) \cdot u_x(\tau, x) \cdot u_{xx}(\tau, x)| dx \leq \\
&\leq \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + 2C_{R_0}^2(\tau) \cdot \left\{ \int_0^N [u_\tau^4(\tau, x) + u_x^4(\tau, x)] \cdot u_{xx}^2(\tau, x) dx \right\} \leq \\
&\leq \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + 2C_{R_0}^2(\tau) \cdot \left\{ 2(g'(\tau))^4 + 4 \int_0^N u_\tau^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2f^4(\tau) + 4 \int_0^N u_x^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx \Big\} \cdot \int_0^N u_x^2(\tau, x) dx \leq \\
& \leq 4R_0 \cdot C_{R_0}^2(\tau) \cdot \left\{ \left(\max_{0 \leq t \leq T} |g'(t)| \right)^4 + \left(\max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| \right)^4 \right\} + \\
& + \{1 + 8R_0^2 \cdot C_{R_0}^2(\tau)\} \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + 8R_0^2 \cdot C_{R_0}^2(\tau) \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx, (3.120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^N h_v(\tau, x, u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), u_x(\tau, x), a(\tau)) \cdot u_{xx}(\tau, x) dx \leq \\
& \leq d_{R_0}(\tau) \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx, \quad (3.121)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^N |h_w(\tau, x, u(\tau, x), u_\tau(\tau, x), u_x(\tau, x), a(\tau)) \cdot u_{xx}(\tau, x) \cdot u_{xx}(\tau, x)| dx \leq \\
& \leq 2d_{R_0}(\tau) \cdot \int_0^N |u_{xx}(\tau, x) \cdot u_{xx}(\tau, x)| dx \leq d_{R_0}(\tau) \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + \\
& + d_{R_0}(\tau) \cdot \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx. \quad (3.122)
\end{aligned}$$

Теперь, пользуясь оценками (3.119)-(3.108), из (3.116) получаем, что для любых N и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^N u_{xx}^2(t, x) dx + \int_0^N u_{xx}^2(t, x) dx = \int_0^\infty (\psi'(x))^2 dx + \int_0^\infty (\varphi''(x))^2 dx + \\
& + 2 \int_0^t u_{xx}(\tau, N) u_{xx}(\tau, N) d\tau + 2 \int_0^T |f'(\tau) g''(\tau)| d\tau + 2 \int_0^T e(\tau) d\tau +
\end{aligned}$$

$$+ 8R_0 \cdot \left\{ \left(\max_{0 \leq t \leq T} |g'(t)| \right)^4 + \left(\max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \right)^4 \right\} \cdot \int_0^T C_{R_0}^2(\tau) d\tau + \int_0^T \left\{ 2[1 + \right. \\ \left. + 8R_0^2 \cdot C_{R_0}^2(\tau)] + 3d_{R_0}(\tau) \right\} \cdot \left\{ \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx + \int_0^N u_{xx}^2(\tau, x) dx \right\} d\tau. \quad (3.123)$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что для любых N и $t \in [0, T]$:

$$\int_0^N u_{tx}^2(t, x) dx + \int_0^N u_{xx}^2(t, x) dx \leq \left\{ C_4 + 2 \int_0^T u_{xx}(\tau, N) \cdot u_{xx}(\tau, N) d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ 2 \left[T + 8R_0^2 \cdot \int_0^T C_{R_0}^2(\tau) d\tau \right] + 3 \int_0^T d_{R_0}(\tau) d\tau \right\}, \quad (3.124)$$

где

$$C_4 \equiv \int_0^\infty (\psi'(x))^2 dx + \int_0^\infty (\varphi''(x))^2 dx + 2 \int_0^T |f'(\tau) g''(\tau)| d\tau + \\ + 2 \int_0^T e(\tau) d\tau + 8R_0 \cdot \int_0^T C_{R_0}^2(\tau) d\tau \times \\ \times \left\{ \left(\max_{0 \leq t \leq T} |g'(t)| \right)^4 + \left(\max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \right)^4 \right\}. \quad (3.125)$$

Далее, пользуясь условием 3 данной теоремы, ограниченностью в Ω_T всех функций $u(t, x)$, $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $a(t)$, $u_{tx}(t, x)$, $u_{xx}(t, x)$ и тем, что каждая из функций h_x, h_u, h_v, h_w удовлетворяет неравенству (3.88), из (3.98) и (3.99) легко получить, что для любых $t \in [0, T]$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_{ix}(t, N) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} u_{ix}(t, N) = 0. \quad (3.126)$$

Тогда, пользуясь соотношениями (3.126) и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, из (3.124) получаем, что:

$$\int_0^\infty u_{ix}^2(t, x) dx + \int_0^\infty u_{ix}^2(t, x) dx \leq C_5 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.127)$$

где

$$C_5 \equiv C_4 \cdot \exp \left\{ 2 \left[T + 8R_0^2 \int_0^T C_{R_0}^2(\tau) d\tau \right] + 3 \int_0^T d_{R_0}(\tau) d\tau \right\}.$$

Таким образом, справедливость априорных оценок (3.113) доказана.

Далее, пользуясь априорными оценками (3.91) и (3.127), из неравенств (3.117) и (3.118) получаем справедливость априорных оценок (3.114). Теорема доказана.

Замечание 3.6. Очевидно, что условие 4 теоремы 3.5, т.е. условие (3.108), выполняется, например, если $f'(t) \equiv 0$ или же $h(t, 0, g(t), g'(t), f(t), a(t)) \equiv 0 \quad \forall a \in (-\infty, \infty)$.

Теорема 3.6. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.5.
2. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, \infty) \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)$:

$$|h_v(t, x, u, v, w, a)| \leq e_R(t) \in L(0, T). \quad (3.128)$$

Тогда для любых классических решений $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.84), (3.2)-(3.4), обладающих теми свойствами, что

$(u(t, x), a(t)) \in E_T$ (где пространство E_T определено в самом начале доказательства теоремы 3.1), производные $u_{xx}(t, x)$, $u_{xxx}(t, x)$ непрерывны в Ω_T и функция $u(t, x)$ удовлетворяет всюду в области Ω_T уравнению (3.6), в котором $F(t, x, u, u_t, u_x, a) = h(t, x, u, u_t, u_x, a) - a \cdot u_t$, справедливы априорные оценки (3.91), (3.92), (3.113), (3.114) и априорные оценки:

$$\sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| \leq R_2, \quad \sup_{\Omega_T} |u_{xx}(t, x)| \leq R_2. \quad (3.129)$$

Доказательство. Справедливость априорных оценок (3.91), (3.92), (3.113) и (3.114) следует из предыдущей теоремы 3.5. Остаётся только доказать справедливость априорных оценок (3.129). Тогда, пользуясь априорными оценками (3.92) и (3.114), обозначением $R^* = \max\{R_0, R_1\}$, для $R = R^*$ неравенствами (3.109)-(3.112) и (3.128) и обозначением

$$G_{X,t} \equiv \{(\tau, x) : 0 \leq \tau \leq t, \quad 0 \leq x \leq X - \tau\} \quad (t \in [0, T], \quad X \geq T), \quad (3.130)$$

из (3.12) и (3.13) легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \max_{G_{X,t}} |u_{tx}| &\leq \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \\ &+ \int_0^t \left\{ 2R_1^3 \cdot C_{R^*}(\tau) + 2R_1^3 \cdot R_1 \cdot C_{R^*}(\tau) + e_{R^*}(\tau) \cdot \max_{G_{X,\tau}} |u_{tx}| + \right. \\ &\left. + d_{R^*}(\tau) \cdot \max_{G_{X,\tau}} |u_{xx}| \right\} d\tau \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + 4R_1^3 \cdot \|C_{R^*}(\tau)\|_{L(0,T)} + \int_0^t (e_{R^*}(\tau) + d_{R^*}(\tau)) \times \\
& \times \left(\max_{G_{X,t}} |u_{tx}| + \max_{G_{X,t}} |u_{xx}| \right) d\tau, \quad (3.131)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{G_{X,t}} |u_{xx}| & \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \\
& + 4R_1^3 \cdot \|C_{R^*}(\tau)\|_{L(0,T)} + \int_0^t (e_{R^*}(\tau) + d_{R^*}(\tau)) \times \\
& \times \left(\max_{G_{X,t}} |u_{tx}| + \max_{G_{X,t}} |u_{xx}| \right) d\tau. \quad (3.132)
\end{aligned}$$

Из (3.131) и (3.132) получаем, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\max_{G_{X,t}} |u_{tx}| + \max_{G_{X,t}} |u_{xx}| & \leq 2 \left\{ \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \right. \\
& + 4R_1^3 \cdot \|C_{R^*}(\tau)\|_{L(0,T)} \left. \right\} + 2 \int_0^t (e_{R^*}(\tau) + d_{R^*}(\tau)) \times \\
& \times \left(\max_{G_{X,t}} |u_{tx}| + \max_{G_{X,t}} |u_{xx}| \right) d\tau. \quad (3.133)
\end{aligned}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем:

$$\begin{aligned}
\max_{G_{X,t}} |u_{tx}| + \max_{G_{X,t}} |u_{xx}| & \leq 2 \left\{ \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \right. \\
& + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + 4R_1^3 \cdot \|C_{R^*}(t)\|_{L(0,T)} \left. \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ 2 \left(\|e_{R^*}(t)\|_{L(0,T)} + \|d_{R^*}(t)\|_{L(0,T)} \right) \right\} \equiv C_6. \quad (3.134)
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства, в силу произвольности числа X ($T \leq X < +\infty$), получаем:

$$\sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_{xx}(t, x)| \leq C_6. \quad (3.135)$$

Отсюда следует справедливость априорных оценок (3.129). Теорема доказана.

Теорема 3.7. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.6.
2. Функция $h(t, x, u, u_t, u_x, a)$, определённая соотношением (3.85), т.е. правая часть уравнения (3.84), обладает тем свойством, что для любых $t \in [0, T]$ и $a \in (-\infty, \infty)$:

$$h(t, 0, g(t), g'(t), f(t), a) + h(t, 0, g(t), g'(t), -f(t), a) - \\ - 2g'(t) \cdot a \equiv h(t). \quad (3.136)$$

Тогда для любых классических решений $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.84), (3.2)-(3.4), обладающих теми свойствами, что $(u(t, x), a(t)) \in E_T$ (где пространство E_T определено в начале доказательства теоремы 3.1), производные $u_{tx}(t, x)$, $u_{xxx}(t, x)$ непрерывны в Ω_T и функция $u(t, x)$ удовлетворяет всюду в области Ω_T уравнению (3.6), в котором $F(t, x, u, u_t, u_x, a) = h(t, x, u, u_t, u_x, a) - a \cdot u_t$, справедливы априорные оценки (3.91), (3.96), (3.113), (3.114), (3.129) и априорная оценка:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |a(t)| \leq R_3. \quad (3.137)$$

Доказательство. Справедливость априорных оценок (3.91), (3.92), (3.113), (3.114) и (3.129) следует из предыдущей теоремы 3.6. Остаётся доказать справедливость априорной оценки (3.137).

Подставив выражение (3.6) в условие (3.4), дифференцируя полученное равенство два раза по t ($t \in [0, T]$) и пользуясь условиями (3.3), (3.4), легко получить, что функция $a(t)$ удовлетворяет на $[0, T]$ уравнению (3.7), причём из (3.136) следует, что для любых $t \in [0, T]$ и $a \in (-\infty, \infty)$:

$$F(t, 0, g(t), g'(t), f(t), a) + F(t, 0, g(t), g'(t), -f(t), a) = h(t). \quad (3.138)$$

Тогда, пользуясь априорными оценками (3.92), (3.114) и (3.129), обозначением $R^* = \max\{R_0, R_1\}$, для $R = R^*$ неравенствами (3.109)-(3.112), (3.128) и соотношением (3.138), из (3.7), совершенно аналогично неравенствам (3.131) и (3.132), легко получить, что:

$$G_{X,t} = \{(\tau, x) : 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq x \leq X - \tau\} \quad (t \in [0, T], X \geq T), \quad (3.130)$$

из (3.12) и (3.13) легко получить, что:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |a(t)| &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{g'(t)} \cdot (\varphi''(t) + \psi'(t) - f'(t) - g''(t)) \right| + \\ &+ \frac{1}{2} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{h(t)}{g'(t)} \right| + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |g'(t)|} \cdot \left\{ 4R_1^3 \cdot \|C_{R^*}(t)\|_{L(0,T)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ C_6 \cdot \left(\|e_{R^*}(t)\|_{L(0,T)} + \|d_{R^*}(t)\|_{L(0,T)} \right) \} \equiv C_7.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.8. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.4.
2. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, \infty) \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^3$:

$$|h(t, x, u, v, w, a)| \leq b_R(t) \cdot (|v| + |w|), \quad (3.139)$$

где функция $h(t, x, u, u_t, u_x, a)$ определена соотношением (3.85), $b_R(t) \in L(0, T)$.

Тогда для первой компоненты $u(t, x)$ любого классического решения $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.84), (3.2)-(3.4), удовлетворяющей в Ω_T уравнению (3.6), в котором $F(t, x, u, u_t, u_x, a) = h(t, x, u, u_t, u_x, a) - a \cdot u_t$, справедливы априорные оценки (3.91), (3.92) и априорные оценки:

$$\sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| \leq R_4, \quad \sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| \leq R_4. \quad (3.140)$$

Доказательство. Справедливость априорных оценок (3.91) и (3.92) следует из теоремы 3.4. Остаётся доказать справедливость априорных оценок (3.140).

Пользуясь обозначением (3.130) и для $R = R^*$ неравенством (3.139), из уравнений (3.10) и (3.11) легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\max_{G_{X,t}} |u_t| \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \\ + \int_0^t b_{R_0}(\tau) \cdot \left(\max_{G_{X,t}} |u_t| + \max_{G_{X,t}} |u_x| \right) d\tau.$$

$$\max_{G_{X,t}} |u_x| \leq \sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \\ + 2 \int_0^t b_{R_0}(\tau) \cdot \left(\max_{G_{X,t}} |u_t| + \max_{G_{X,t}} |u_x| \right) d\tau,$$

где $R_0 > 0$ - число, фигурирующее в априорной оценке (3.92).

Из последних двух неравенств имеем:

$$\max_{G_{X,t}} |u_t| + \max_{G_{X,t}} |u_x| \leq 2 \left(\sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \right) + \\ + 2 \int_0^t b_{R_0}(\tau) \cdot \left(\max_{G_{X,t}} |u_t| + \max_{G_{X,t}} |u_x| \right) d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем:

$$\max_{G_{X,t}} |u_t| + \max_{G_{X,t}} |u_x| \leq C_8, \quad (3.141)$$

где

$$C_8 \equiv 2e^{\int_0^T b_{R_0}(\tau) d\tau} \cdot \left(\sup_{x \geq 0} |\varphi'(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \right).$$

Из неравенства (3.141), в силу произвольности числа X ($T \leq X < +\infty$), получаем:

$$\sup_{\Omega_T} |u_t(t, x)| + \sup_{\Omega_T} |u_x(t, x)| \leq C_8,$$

Отсюда следует справедливость априорных оценок (3.140). Теорема доказана.

Теорема 3.9. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.8.
2. Функции $h_x(t, x, u, v, w, a), h_u(t, x, u, v, w, a), h_v(t, x, u, v, w, a)$ и $h_w(t, x, u, v, w, a)$ непрерывны по совокупности своих переменных в области $[0, T] \times [0, \infty) \times (-\infty, \infty)^4$.
3. Для каждого $R > 0$ в области $[0, T] \times [0, \infty) \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)$:

$$|h_x(t, x, u, v, w, a)| \leq C_R(t), |h_u(t, x, u, v, w, a)| \leq C_R(t), \quad (3.142)$$

$$|h_v(t, x, u, v, w, a)| \leq C_R(t), |h_w(t, x, u, v, w, a)| \leq C_R(t), \quad (3.143)$$

где $C_R(t) \in L(0, T)$.

Тогда для первой компоненты $u(t, x)$ любого классического решения $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.84), (3.2)-(3.4), удовлетворяющей в Ω_T уравнению (3.6), в котором $F(t, x, u, u_t, u_x, a) = h(t, x, u, u_t, u_x, a) - a \cdot u_t$, справедливы априорные оценки (3.91), (3.92), (3.140) и априорные оценки:

$$\sup_{\Omega_T} |u_{tx}(t, x)| \leq R_5, \quad \sup_{\Omega_T} |u_{xt}(t, x)| \leq R_5. \quad (3.144)$$

Доказательство. Справедливость априорных оценок (3.91), (3.92) и (3.140) следует из теоремы 3.8. Остаётся доказать справедливость априорных оценок (3.144). Пользуясь обозначением (3.130) и для $R = R^* = \max\{R_0, R_4\}$ неравенств

вами (3.142), (3.143), совершенно аналогично (3.131)-(3.133), из уравнений (3.12) и (3.13) легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \max_{G_{N,t}} |u_{tx}| + \max_{G_{N,t}} |u_{xx}| \leq 2 \left\{ \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \right. \\ \left. + (1 + R_4) \cdot \|C_{R^*}(t)\|_{L(0,T)} \right\} + 2 \int_0^t C_{R^*}(\tau) \cdot \left(\max_{G_{N,t}} |u_{tx}| + \max_{G_{N,t}} |u_{xx}| \right) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем:

$$\max_{G_{N,t}} |u_{tx}| + \max_{G_{N,t}} |u_{xx}| \leq C_9, \quad (3.145)$$

где

$$\begin{aligned} C_9 \equiv 2e^{2 \int_0^T C_{R^*}(\tau) d\tau} \cdot \left\{ \sup_{x \geq 0} |\varphi''(x)| + \sup_{x \geq 0} |\psi'(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| + \right. \\ \left. + (1 + R_4) \cdot \|C_{R^*}(t)\|_{L(0,T)} \right\}. \end{aligned}$$

Из (3.145), в силу произвольности числа X ($T \leq X < +\infty$), следует справедливость априорных оценок (3.144). Теорема доказана.

Теорема 3.10. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.9.
2. Выполнено условие 2 теоремы 3.7.

Тогда для любых классических решений $(u(t, x), a(t))$ задачи (3.84), (3.2)-(3.4), где функция $u(t, x)$ удовлетворяет

уравнению (3.6), в котором $F(t, x, u, u_t, u_x, a) = h(t, x, u, u_t, u_x, a) - a \cdot u_t$, справедливы априорные оценки (3.91), (3.92), (3.140), (3.144) и априорная оценка:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |a(t)| \leq R_6. \quad (3.146)$$

Доказательство. Справедливость априорных оценок (3.91), (3.92), (3.140) и (3.144) следует из теоремы 3.9. А справедливость априорной оценки (3.146) устанавливается совершенно так, как была установлена та же априорная оценка при доказательстве теоремы 3.7. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аниконов Ю.Е. Теорема единственности решения обратной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 1979, 12, №12, с.2265-2266.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965, 276 с.
3. Бидайбеков Е.Ы. Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения гиперболического типа // В сб. «Математические проблемы геофизики», вып.4, Новосибирск, 1973, с.61-68.
4. Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной задачи для неоднородной струны // Труды Математического Института АН СССР, 1971, 115, с.28-38.
5. Велиев А.А. Исследование классического решения одной нелинейной обратной одномерной краевой задачи для одного класса полулинейных гиперболических уравнений второго порядка // Материалы республиканской конференции молодых учёных по математике и механике, Институт Математики и Механики АН Азерб.ССР, 1976.

6. Велиев А.А. Исследование классического решения одной нелинейной обратной одномерной краевой задачи для одного класса полулинейных гиперболических уравнений второго порядка. Рукопись депонирована в ВИНТИ 14 июля 1976 г., №2642-76 Деп., 39 с.
7. Велиев А.А. Исследование классического решения одной нелинейной обратной одномерной краевой задачи для одного класса полулинейных гиперболических уравнений второго порядка // Учёные записки Азербайджанского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 1976, №4.
8. Велиев А.А. Классическая разрешимость в малом одной одномерной обратной краевой задачи на полуоси для одного класса полулинейных гиперболических уравнений второго порядка. Рукопись депонирована в ВИНТИ 10 марта 1977 г., №884-77 Деп., 22 с.
9. Weston V.H. On the inverse problem for a hyperbolic dispersive partial differential equation // J.Math.Phys., 1972, 13, №12, p.1952-1956.
10. Глушкова Е.С. Теорема единственности одной обратной задачи для квазилинейного уравнения гиперболического типа // В сб. «Некорректные математические задачи и проблемы геофизики», Новосибирск, 1976, с.35-45.

11. Глушкова Е.С. О единственности определения коэффициентов квазилинейного уравнения гиперболического типа // Вопросы корректности задач математической физики, Новосибирск, 1977, с.42-56.
12. Елубаев С.В. Теорема единственности одной обратной задачи для гиперболического уравнения второго порядка // Математические проблемы геофизики, вып.4, Новосибирск, 1973, с.74-83.
13. Забрейко П.П., Красносельский М.А. Об одном приеме получения новых принципов неподвижной точки // Доклады АН СССР, 1967, 176, №6, с.1233-1235.
14. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнения // Успехи математических наук, 1960, т.XV, вып.2 (92), с.97-154.
15. Кабанихин С.И. О единственности определения коэффициентов гиперболического уравнения // Вычислительный Центр Сибирского отделения АН СССР, 1978, №91, 28 с.
16. Cannon J.R., Dunninger D.R. Determination of an unknown forcing function in a hyperbolic equation from overspecified data // Ann. mat. pura ed appl., 1970, №85, p.49-62.

17. Красносельский М.А. Топологические методы теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956, 392 с.
18. Кулиев М.А. Об одной обратной задаче для гиперболического уравнения второго порядка // Известия АН Азерб.ССР, серия физико-математических наук, 1971, №2, с.144-148.
19. Кулиев М.А. О некоторых неклассических задачах для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Кандидатская диссертация, АН Азерб.ССР, Институт Кибернетики, 1973, 77 с.
20. Кулиев М.А. Исследование многомерных обратных краевых задач для параболических и гиперболических уравнений. Дис...докт.физ.-мат.наук – Баку, 2006 г., Институт Математики и Механики Национальной АН Азербайджана, 256 с.
21. Лаврентьев М.М., Васильев В.Г., Романов В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1967, 150 с.
22. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953, 279 с.
23. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.

24. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
25. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972, 588 с.
26. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965, 520 с.
27. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.-Л.: Гостехиздат, 1952, 216 с.
28. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
29. Похожаев С.И. О теореме вложения С.Л.Соболева в случае $p \cdot l = n$ // Москва, Доклады научнотехнической конференции МЭИ, секция матем., 1965, с.158-170.
30. Романов В.Г. Обратная задача распространения электрических колебаний в проводах // Математические проблемы геофизики. I, Новосибирск, 1969, с.92-102.
31. Романов В.Г. Обратная задача для гиперболических уравнений и энергетические неравенства // Доклады АН СССР, 1978, 242, №3, с.541-544.
32. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.V. М.: Наука, 1959, 655 с.

33. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издательство Ленинградского Государственного Университета, 1950, 255 с.
34. Справочная Математическая Библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972, 544 с.
35. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953, 724 с.
36. Халилов З.И. Новый метод решения уравнения колебаний упругих систем // Известия Азербайджанского филиала Академии Наук СССР, 1942, №4, с.130-131.
37. Халилов З.И. Решение уравнения колебания сжатой пластинки // Известия Азербайджанского филиала Академии Наук СССР, 1942, №4, с.165-167.
38. Халилов З.И. Об одной задаче проблемы колебаний // Известия Азербайджанского филиала Академии Наук СССР, 1942, №4, с.168-169.
39. Халилов З.И. О решении бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерра // Известия Азербайджанского филиала Академии Наук СССР, 1942, №7, с.84-86.
40. Халилов З.И. Об одном методе решения смешанных задач // Доклады Академии Наук СССР, 1952, т.33, №5, с.659-662.

41. Халилов З.И. Решение задачи колебания конечной струны в среде с переменным коэффициентом сопротивления // Доклады Академии Наук Азербайджанской ССР, 1952, т.8, №7, с.333-337.
42. Халилов З.И. К теории одного метода решения смешанных задач // Доклады Академии Наук Азербайджанской ССР, 1953, т.9, №8, с.425-429.
43. Халилов З.И. К методу разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач // Доклады Академии Наук Азербайджанской ССР, 1954, т.10, №3, с.151-158.
44. Халилов З.И. К методу разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач // Труды Азербайджанского Государственного Университета, 1954, вып.4, с.5-29.
45. Худавердиев К.И. Нелокальные теоремы существования и единственности решения предельной краевой задачи на полубесконечной прямой для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка // Доклады АН Азерб.ССР, 1966, 22, №5, с.3-7.
46. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для квазилинейных гиперболических уравнений.

Дис...докт.физ.-мат.наук, Баку-1973, Азербайджанский Государственный Университет, 319 с.

47. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.
48. Худавердиев К.И. Многомерная смешанная задача для нелинейных гиперболических уравнений. Баку: Типография АзТУ, 2011, 611 с.
49. Худавердиев К.И., Намазов Ф.М. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных симметрично регуляризованных уравнений длинных волн. Баку: Типография АзТУ, 2011, 184 с.
50. Худавердиев К.И., Алиев С.Дж. Многомерная смешанная задача для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений третьего порядка. Баку: Типография АзТУ, 2012, 252 с.
51. Худавердиев К.И., Махмудова М.Г. Исследование одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка. Германия, г.Саарврюккен: Научное Издательство Lambert Academic Publishing, 2012, 130 с.

52. Jamaquti M. On the a priori estimate for solutions of the cauchy problem for some nonlinear wave equations // J.Math. Kyoto Univ., 1962, 2, №1, p.55-60.
53. Яхно В.Г. Теорема существования и единственности одной одномерной обратной задачи для квазилинейного уравнения второго порядка гиперболического типа // В сб. «Математические проблемы геофизики», Новосибирск, вып5, ч.2, Новосибирск, 1974, с.173-183.
54. Яхно В.Г. Обратная задача для волнового уравнения (построение решения обратной задачи) // Доклады АН СССР, 1978, 242, №3, с.541-544.

Ахмед Абдулкерим оглы Велиев
доктор физико-математических наук, профессор

Карлен Искендер оглы Худавердиев
заслуженный деятель науки,
доктор физико-математических наук, профессор

**Исследование одномерных обратных краевых задач
в конечной и бесконечной областях для полулинейных
гиперболических уравнений второго порядка
(монография)**



Mətbəə müdürü:	<i>Əvəz İdrisoğlu</i>
Dizayner:	<i>Vəfa Nağıyeva</i>
Texniki redaktor:	<i>Şahin Abbasov</i>
Operator:	<i>Dilbər Qələndərli</i>

Подписано к печати 27.03.2012 г.
Тираж 300 экз. Объем 9 п.л.
Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага высшего сорта.

Типография АЗТУ. пр.Г. Джавида 25
Tel: (+012) 539-14-52
E.mail: aztumetbee@yahoo.com

